水科学数学模型丛书
Books on Mathematical Models in Water Sciences

Groundwater Flow Models

地下水运动数学模型

杨金忠　蔡树英　王旭升／编著



科学出版社
www.sciencep.com

(TV-0084.0101)

作者简介



杨金忠，武汉大学教授，博士生导师。1953年生，1975年毕业于河北地质学院，留校任教4年，主要从事地下水动力学和地下水资源的教学和科研工作；1979年考入武汉水利电力学院攻读研究生，主要开展饱和—非饱和土壤中水分和溶质运移的理论和实验研究，1982年和1986年分别获硕士学位和工学博士学位，后留校任教至今，1991年晋升为教授，同年被国家教委授予有突出贡献的博士学位获得者，并获得国务院政府特殊津贴。在美国、澳大利亚进行多年合作研究。长期从事渗流理论、溶质运移理论、地下水资源评价、地下水污染防治、灌溉排水理论、农田水利、水利工程规划设计等领域的教学和科研工作。在饱和—非饱和介质中的水分运动、溶质运移、数值模拟方法和随机理论的研究颇具特色。主持和参加了三十多项国家科技攻关课题、国家自然科学基金课题、国家教委基金等课题，已发表论文150余篇，主编和合作编写专著五部，获得省部级自然科学奖和科技进步二等奖三项。

水科学数学模型丛书

Books on Mathematical Models in Water Sciences

- 水文模型
- 水力学数学模型
- 水沙输移数学模型
- 地下水运动数学模型
- 水环境数学模型
- 土壤侵蚀数学模型
- 水资源管理数学模型

ISBN 978-7-03-025758-1

9 787030 257581 >

定价：59.00 元

销售分类建议：农田水利/水文地质/环境科学

地下水运动数学模型

杨金忠　蔡树英　王旭升 编著

二〇〇九年

序

地下水是全球水资源的重要组成部分，在社会经济发展中发挥着重要的作用。由于人类对地下水过度开发引起的一系列生态和环境问题，提示人们必须对地下水进行合理开发和有效保护，才能达到可持续利用；促使人们进一步加强对地下水科学的研究，从而在地下水运动理论和方法研究方面不断取得新的进展和突破，为解决实际生产问题提供理论基础和技术保障。要实现对地下水的合理开发和持续利用，需要定量分析地下水量和地下水质的时空分布特征和转化运移规律，地下水运动数学模型是开展这方面工作的理论基础和实用工具。本书在阐述地下水科学领域的基本理论和数学模型的基础上，也将在该领域的一些最新研究成果及时传递给读者。

Darcy 定律的提出奠定了地下水运动的理论基础，建立了地下水流通量和水分能量之间的定量关系。根据渗流的基本概念和 Darcy 定律，应用流体力学和水力学的基本理论，可以建立多孔介质中水流运动的基本方程。非饱和土壤中的水分运动是土壤物理学家研究的主要问题之一，根据 Buckingham 和 Rechards 的研究，Darcy 定律对非饱和土壤水分运动同样适用，这样，非饱和土壤水分的运动和饱和地下水运动可以利用近乎相同的数学物理方程进行描述，两者之间的主要差别是关于水力传导率和水分能量的描述。多孔介质中溶质运移的基本理论为水动力弥散理论，该理论建立了溶解于多孔介质水分中的溶质通量与水分溶质浓度之间的定量关系，应用流体力学中的质量守恒原理，可以得到多孔介质中溶质运移的水动力弥散方程。作者较简洁地叙述了地下水、土壤水和溶质运移的基本理论，给出了基本方程和定解问题，为地下水运动模型的建立奠定了基础。

描述地下水流运动或溶质运移的数学形式都是一组偏微分方程（或偏微分方程组）。定量研究地下水、土壤水和溶质运移的问题，实际上是求解偏微分方程的数学问题。早期的求解方法主要为复变函数方法和积分变换方法，对于相对简单的边值问题，利用这些方法得到相应问题的解析解，解析解结果对深入认识和理解地下水流运动的特征和解决实际生产问题起到了重要作用。本书中作者对解析解的具体求解方法未进行详细讨论，但利用少量笔墨简单介绍了典型的解析解和实用公式，主要分析了这些结果的物理意义和应用条件。

对于比较复杂的问题，解析解就显得无能为力了，但可借助于渗流槽模拟、电模拟和数值方法得到问题的近似解。前两种方法在上世纪 60~70 年代应用较多，但随着计算机的广泛应用，已逐渐被数值计算方法所代替。目前，数值方法已成为求解复

杂地下水运动和溶质运移问题的主要方法。作者和他们所在的研究团队在数值计算方面开展了大量的研究，书中给出了不同的数值模型和数值方法，其中包括了作者多年的研究成果，具有较好的实用性。

介质渗透特性分布的随机性决定了地下水运动的不确定性，这对传统的确定性理论模型提出了新的挑战，而随机理论的出现为解决这一问题提供了可能。作者在此领域进行了深入研究，据我所知，作者近年来主持和参加了多项有关地下水运动随机理论的国家自然科学基金课题的研究，取得了丰硕的研究成果。本书针对地下水运动、非饱和土壤水分运动和溶质运移问题，介绍了介质的随机特征及其描述方法，建立了水分运动的随机模型，并对求解随机微分方程的常用方法进行探讨，同时讨论了随机数值模型和时间序列分析模型，这些内容将对读者了解随机理论的进展和应用这些方法解决实际问题提供重要参考。

本书以一种比较简练的方式给出各种地下水、土壤水和溶质运移问题的数学模型，同时介绍了目前在本领域常用的计算软件和实用工具。其中不仅涵盖了已被广泛应用的模型和计算方法，还汇集了作者及其团队多年来在该领域的研究成果，包括数学模型、数值方法和计算软件等。本书可供从事水文地质、水资源、农田水利等领域的科研、教学工作人员和实际应用工作人员阅读和参考。相信本书的出版将对解决地下水开发利用中的生产实际问题和促进地下水科学研究的发展发挥重要的作用。

应作者之约，以此为序。

武 汉 大 学 教 授
中 国 工 程 院 院 士

2009 年 7 月 11 日

前　言

本书是《水科学数学模型》丛书中的其中一册，主要阐述地下水科学领域的基础理论和数学模型，以及该领域的最新研究成果。

全书包括绪论和七章内容。绪论中概述了研究地下水运动数学模型的意义、地下水理论的历史发展及最新的研究动态；第一章简单介绍了地下水运动基本理论；第二章给出了常用的河渠影响下地下水运动模型，含水层中的井流模型在第三章中作了介绍；在第四章中，除了论述地下水数值模拟常用的数值方法和数值模型外，还介绍了目前国际上较为通用的MODFLOW应用软件；非饱和带是地下水与大气连接的通道，其中的水分运动状况不仅与农田作物生长密切相关，还对地下水的质和量有着直接影响，第五章对非饱和水分运动模型进行介绍；随着地下水污染的加剧和人们环境问题的重视，地下水溶质运移理论和计算问题显得尤为重要，本书第六章在叙述水动力弥散和对流-弥散方程后，给出了几种求解对流-弥散方程比较有效的数值方法，简单介绍了几个求解对流-弥散问题的常用数值模型和应用软件；由于介质渗透特性分布的随机性，水流在随机介质中运动也将是随机的，在第七章中，首先介绍了介质的随机特征及其描述方法，对于水分运动问题建立了随机模型，讨论了求解随机微分方程常用的方法，对于饱和地下水运动问题和饱和-非饱和水分运动问题，详细介绍了蒙特卡罗模型和基于 Karhunen-Loève 随机展开的随机数值模型，同时讨论了简单实用的时间序列分析模型。

参加本书编写的人员有：杨金忠（绪论、第六章、第七章），蔡树英（第一章、第二章、第五章），王旭升（第三章、第四章），李少龙（第七章部分内容）。杨金忠和蔡树英负责全书的统稿工作。张蔚榛院士仔细阅读了初稿，为本书的结构和内容取舍等方面提出了宝贵的意见。研究生李少龙、史良胜、廖卫红、朱焱、周发超、孙怀卫、查元源、谭丹、邓明亮等参加了部分研究工作，承担了大量资料整理和编排工作；书中的部分内容是作者所在课题组多年来的研究成果，课题组的成员和研究生作出了大量贡献；研究课题曾得到国家自然科学基金委员会、国家高技术研究发展计划（863计划）、国家科技支撑计划的资助；本书的出版得到国家自然科学基金（50639040）和水资源与水电工程科学国家重点实验室（武汉大学）研究成果出版基金的资助，在此一并表示感谢！

限于作者水平，本书定有许多不完善和欠妥之处，敬请同行批评指正。

编　　者

2009年5月

目　录

绪 论

地下水资源是水资源的重要组成部分，我国水资源总量为 2.8 万亿 m^3，其中地下水资源量为 8288 亿 m^3，约占全国水资源量的 30%（钱正英和张光斗，2001）。2005 年全国总供水量 5633 亿 m^3，地下水供水量 1038 亿 m^3，约占 18%。我国南方地区供水量 3142 亿 m^3，其中地下水供水量 135 亿 m^3，占 5%；北方地区供水量 2490 亿 m^3，其中地下水供水量 904 亿 m^3，占 36%（中国水资源公报 2005，2006）。海河流域是我国水资源供需矛盾最突出的地区之一，2005 年该地区总供水量 383 亿 m^3，其中地下水供水量 253 亿 m^3，占总供水量的 66%（任宪韶等，2007），供水主要依靠地下水。根据河北省 1991~2000 年供水量的统计资料（河北省水利厅，2004），10 年来河北省地下水供水量的比例占总供水量的 73%。

从 20 世纪 80 年代初至 90 年代末，在全国范围内以城市和农村井灌区为中心形成的地下水超采区数量已从 56 个发展到 164 个；超采区面积从 8.7 万 km^2 扩展到 18 万 km^2，超采量逐年增加，2000 年的超采量已近百亿 m^3，累计超采量逾 1000 亿 m^3。根据我国 80 年代的水资源评价结果，并结合水利部水资源司（2004）对地下水资源量的计算结果，海河流域地下水资源量为 273 亿 m^3，松辽河流域地下水资源量为 636 亿 m^3，黄河流域地下水资源量为 432 亿 m^3，以上三流域地下水资源利用率分别为 0.93、0.42 和 0.31，地下水可开采量分别为 214 亿 m^3、311 亿 m^3 和 186 亿 m^3，地下水的开采系数 K（地下水的实际开采量与地下水可开采量之比）分别为 1.3、2.0 和 2.3，均都大于 1。海河流域、松辽河流域和黄河流域是我国地下水超采较严重的地区，其中海河流域片地下水超采问题最为严重，地下水严重超采的面积占全国严重超采面积的 50%以上。在其他流域片，由于局部地下水超采，同样分布有地下水严重超采面积。地下水的开发利用支持和保障了我国经济社会的快速发展，但由于对地下水资源的有限性认识不足，在水资源供需矛盾日益突出的情况下，不合理开发利用造成的地下水环境问题也随之凸现：部分地区浅层地下水水位持续下降，一些地区的含水层几近疏干，大批生产井吊泵报废；20 多个大中城市因深层承压水超采引发了地面沉降，造成建筑物开裂、毁坏、堤防防洪标准降低等灾害；部分沿海地区发生了海水入侵，致使这些地区的地下水基本丧失了使用功能；一些隐覆岩溶区发生了多起地面塌陷；西北干旱半干旱地区，大片天然植被枯萎、绿洲消退、土地沙化、沙尘暴加剧，危及到了当地人民的生存条件。与此同时，地下水污染状况也日趋严重，被调查的城市中地下水大部分受到不同程度的污染。上述问题若不加以改善和缓解，地下水资源的持续利用将面临巨大的挑战。

要维持地下水资源的可持续利用，必须科学、合理地利用地下水，这就需要了解地下水的补给、径流和排泄条件，研究地下水的运动规律。地下水动力学是一门专门研究地下水运动规律的学科，主要研究地下水的循环规律，对地下水的数量和质量进行定量评价，研究与地下水有关的环境问题。其主要研究领域包括：①水在介质中的运动机理、数学模型和计算方法；②溶质和热量在地下水中的运移规律和计算方法；③水和溶质在包气带中的运动；④地下水的合理开发和优化管理。在地下水动力学的研究中，主要根据数学物理原理，运用物理摸拟、数学模拟和数学规划法，通过渗流槽、窄缝槽、电模拟、野外试验等物理手段研究地下水的运动机制或水文地质原型的物理量之间的定量关系。

本书侧重于地下水运动的机理和定量研究。地下水运动的定量研究主要包括三个方面：①地

下水运动机理的研究，主要研究地下水以及地下水的物理特征（如地下水中溶质的浓度、地下水的温度等）通过复杂的介质（包括孔隙介质、裂隙介质、溶隙介质等）运移和转化所遵循的物理规律，并给出物理规律的定量描述；研究在地下水及其溶质运移和转化规律的定量描述中所涉及的物理参数或经验参数，以及这些参数的表达方式、物理意义及其与介质、流体及其外界等因素之间的关系；研究由于地下水水头、浓度、温度等物理特征的变化所引起的流体性质或介质性质的变化规律，如溶质的结晶溶解、吸附解吸、蒸发冻结、介质压缩、孔隙度或导水性的变化、地面沉降规律等；②提出地下水以及地下水的物理特征在多孔介质中运动所满足的数学模型，首先确定地下水水头、含水量、溶质浓度、水温等待求变量所遵守的数学物理方程，然后根据需要找出问题的边界特征和起始状况，确定边界条件和起始条件，有时还需要确定不同待求未知量之间或未知量与影响因素之间的本构关系，建立本构方程；如果以上所谈及的问题得到了较好的回答，这时所要解决的特定问题为一个定解问题；③对于所建立的定解问题，利用不同方法得到问题的解，也就得到了待求未知函数的时空分布；求解方法主要包括解析方法、物理模拟方法、数值方法等。原则上对于简单的问题可以采用解析解，而对于复杂的问题就必须利用数值方法求解。本书以数值解和随机模型为重点，兼顾一些简单可用的解析解。

法国水力工程师达西（Henry Darcy）在 1856 年通过实验得出了水在孔隙介质中渗透的定律，即达西定律。达西定律与欧姆定律和热传导定律在数学上具有相同的形式，在物理概念上描述了通量与势能之间的关系，正是这种基本运动规律的相似性，为以后利用电模拟方法研究地下水运动奠定了基础。达西定律指出了地下水渗透通量与地下水水头梯度成正比，比例系数为介质固有的透水性质——渗透系数，其重要贡献是将地下水水流通量与地下水水头相联系，这样可以将已经成熟的研究流体力学的方法和成果用于研究地下水运动。关于流体在多孔介质中运动基本理论的论著，读者可参考薛定谔（1982）、Bear（1972，1990）、薛禹群（1986）等著作。以达西定律为基础，裘布依推导出了不同类型的地下水单向及平面径向稳定流公式。这些公式描绘了地下水在稳定状态下的运动特征，得到了广泛的应用（卡明斯基，1955；北京地质学院，1961；施普德，1977）。裘布依公式的出现，对当时地下水水力学的发展起了重要的作用，直到今天仍有一定的实用价值，目前大量利用地下水稳定抽水试验求解含水层参数的方法仍然采用地下水稳定流计算方法。裘布依公式出现后的很长一段时间，地下水水力学虽有一定程度的发展，但总体没有超出稳定流理论的范围。随着地下水开发利用的持续，以 1935 年发表的泰斯公式为代表，地下水非稳定流理论得到了长足发展，并在生产实践中广泛应用。张宏仁（1975，1992）详细研讨了地下水非稳定流发展的历史，编译了在非稳定流发展过程中具有里程碑意义的论文，为我们了解地下水非稳定理论的发展提供了最基础和最完整的文献资料。20 世纪 70 年代开始，地下水非稳定流理论在我国得到快速发展，一些数学家和水文地质学家密切合作，形成了具有我国特色的地下水非稳定流运动的理论体系，出版了一系列具有代表性的论著（杨天行等，1980；张蔚榛，1983；陈崇希，1983）。地下水的开采主要以管井为主，在地下水非稳定流理论的论著中，学者主要探讨的是井的非稳定渗流问题，在地下水动力学的教材中，井流的计算和求参是其主要的研究内容。而在与地下水运动有关的农田水利领域，地下水位的控制、盐碱地的治理主要以排水沟为主，需要利用地下水运动的理论确定排水沟间距和排水沟深度（张蔚榛，1983）。因此，井流和沟渠影响下地下水运动的理论和计算是本书涉及的主要内容之一。

从计算方法的角度来看，在高速计算机出现之前，解析方法和物理模拟方法是求解地下水数学物理问题的主要方法。

在 20 世纪 50 年代以前，求解地下水运动问题以解析方法为主，它通过数学分析手段（包括变量代换、分离变量、保角变换、积分变换等）得到各种理想化条件下水流运动的解析解。解析解在理论上和形式上都很完美，通过对解析解的分析，可以从物理机理上深入理解地下水的运动过程与特征。特别重要的是，地下水运动的解析解为求取水文地质参数提供了简洁的工具。但是，由于数学工具的局限性，只有在比较简单的条件下才有可能得到解析解，条件稍一复杂，特别是对于非均质问题、非线性问题和区域较为复杂的问题，就很难得出解析解。有的时侯，即便是可以得出解析解，但由于解的形式太过繁杂而难以在实际工作中应用。正是解析方法的这一缺点限制了它的推广和应用。

20 世纪 50~70 年代初期，可求解复杂地下水运动规律的电模拟方法得到深入研究和广泛应用。这种方法根据地下水运动的达西定律与电流运动的欧姆定律的相似性以及对地下水流质量守恒方程的有限差分近似，可以利用介质的电阻和电容模拟含水层的导水性和储水性，通过测量电网络系统的电流和电压，得到相应地下水系统的渗透速度和水头分布，为非均质、各向异性、不规则的几何形状、多层结构含水层及复杂的人工干扰条件下地下水运动的模拟提供了有力的工具。用电阻网络模拟稳定流的模型在 20 世纪 40 年代末期就出现了，而模拟非稳定流的电阻-电容网络是 50 年代发展起来的，到 60 年代初期，它已成为求解大范围含水层中地下水流问题的有力工具。南京水利科学研究所对电网络模型进行了详细的研究，武汉水利电力学院建立了电阻网络和电阻-电容网络，河北地质学院使用电阻-电容网络解决了天津大化供水和邯邢某矿区地下水疏干条件下的地下水系统的模拟。电模拟方法的主要缺点是网络固定，通用性较差，难以处理潜水问题，而且只能用于地下水流的模拟，不能用于水质和其他方面的模拟（孙讷正，1981）。70 年代以后，由于计算机的快速发展，求解地下水运动问题的数值方法得到快速发展，不断提出各种求解方法，开发出大量通用软件。由于数值模拟方法的便利性和通用性，几乎可以替代电网络模型而成为解决地下水运移模拟的主要方法。20 世纪 80 年代后，电模拟模型的研究和发展受到很大的限制，已逐步退出历史舞台。因此，本书中未对地下水运动的电模拟模型进行介绍。

我国地下水数值模拟的研究始于 20 世纪 70 年代，特别是水文地质学家与数学家合作，从理论研究、数值方法、实际应用等不同层面开展不同类型的协作研究，经过几十年的不懈努力，数值模拟方法得到广泛的应用，已成为目前研究地下水运移问题的主要工具和手段。我国科学家在数值理论和数值方法方面的研究基本与国际前沿研究同步，利用有限差分法、有限元法、边界元法、有限解析法、有限体积法、特征线法等解决地下水渗流和溶质运移问题，各研究单位和高等学校编制了大量的地下水数值计算的应用程序，撰写了多部专著和教材（薛禹群和谢春红，1980；孙讷正，1981；孙讷正，1989；陈崇希和唐仲华，1989；薛禹群和谢春红，2007），对地下水模拟的推广和应用起到重要作用。数值模拟方法也是解决实际工程问题的主要技术手段，在地下水资源评价、地下水污染、地面沉降、海水入侵、非饱和带水分和盐分的运移、地热分析和地下储能、渠道渗漏、地下水管理等方面得到广泛的应用。尽管我们在实际应用方面取得了显著的成果，但是我国的研究主要是以跟踪国际前沿研究为主，自主创新不足。在理论研究方面和商业软件开发方面与国外相比明显落后，特别是国际上广泛应用的地下水数值模拟程序和商业应用软件，很难看到有中国学者开发研制的产品。

随着数值解和通用模型的广泛应用，在解决具体问题时，人们关注的重点已不是如何得到问题的解，而是如何理解地下水运动的规律和条件，更为精确合理地提出和建立物理问题的数学模型，从而进一步提高分析地下水运动的精度和深度。

国内非饱和水分运动（土壤水分运动）的研究起步较晚。由于非饱和水分运动与作物生长、灌溉需水、农田耗水密切相关，农业院校以及与农田水利有关的学科对于非饱和水分运动的研究较为重视（张蔚榛等，1981；雷志栋等，1988；杨金忠，1986；张蔚榛，1996）。非饱和带是浅层地下水补给的主要途径，也是地下水污染的入口，近年来对非饱和带的研究已引起不同领域学者的高度重视。非饱和带研究的困难主要包括：①水分运动方程的非线性，非饱和水分传导度不仅与介质的性质有关，而且与土壤含水量（或土壤负压）有关；②非饱和水分传导度具有高度的空间变异性，导致预测结果具有较大的变异性；③非饱和带水分运动活跃，特别是由于植物生长的影响和表层难以测量的蒸腾蒸发，给土壤水分的精确模拟带来很大的挑战。目前，土壤水研究走向多学科的交叉，如水、热、盐、养分的耦合运移，冻结土壤中水分的运移，土壤－植物－大气连续体中的水热运移，土壤水分运动的随机理论等。土壤水运动机理研究也更加深入，如优先流、土壤水分参数确定及空间变异性等。土壤水模拟的数值方法除常用的解析法、数值法外，边界层理论、随机模拟、动量分析方法等都得到了长足的发展。同时，土壤水研究的应用也更加广泛，如用于水资源评价、确定土壤水分与作物产量的关系、污水的处理与利用、地下水污染防护等。

非饱和土壤的水力学特征参数是研究和分析土壤水分运动的基础。非饱和土壤水分传导度的测定方法有直接方法（包括实验室方法、田间方法等）和间接方法（包括土壤转换函数方法、分形方法、数值反演方法和经验公式法等），各种方法都具有各自的优点和不足。而非饱和土壤水分传导度空间变异性的描述方法则有地质统计学理论、标定理论、随机理论、分形理论和统计方法等。参数的空间变异是一个十分复杂的问题，特别是目前尚缺乏区域上大量的实际测量资料，需要开展大量的基础性研究工作。

各种不同性质的溶质在多孔介质中运移和扩散主要是由溶质的对流、水动力弥散和溶质各种转化作用所引起。对流作用是指溶质像刚体一样由地下水平均流速携带在多孔介质中迁移；溶质的水动力弥散作用是指，由于微观实际流速引起溶质在介质空隙中的迁移和扩散，其相对于溶质的对流作用而表现出的分散现象；溶质的各种转化作用包括吸附解吸、化合分解、沉淀溶解、氧化还原、挥发浓缩、放射性衰变、酸碱作用、微生物分解和作物吸收等。

各种含水介质的存在使得地下水及溶质在其间的运动很复杂，目前与地下水污染有关的理论和模型都是在一定的简化条件下建立起来的，如忽略各种溶质间的复杂化学反应、忽略或简化弥散的尺度效应等。因此，现有的地下水溶质运移和转化理论及模型还存在较多未解决的问题：如溶质在地下水中运动的机理、水动力弥散“尺度效应”的存在原因、宏观对流-弥散方程的表达方式和宏观弥散系数的影响因素等理论问题；对流-弥散模型对实验室尺度的溶质运移模拟尚可得到较好的分析结果，但应用于区域尺度时，往往预测误差较大，因此还需要通过室内、室外精密的实验研究，来检验传统的对流-弥散方程、可动水体-不动水体模型、随机模型等各种各样描述溶质运移的模型，为模型的实际应用奠定基础；溶质在多孔介质中运移可能以各种不同的化学形态存在，也可能在不同的组分之间进行化学作用，使得对溶质运移过程的描述更为复杂；例如氮素是地下水污染的主要元素之一，氮在运移过程中常以铵态氮、硝态氮、亚硝态氮等不同形式存在，铵态氮容易吸附并易于挥发，同时发生硝化作用而转化为硝态氮，硝态氮不易吸附，可通过反硝化作用转化为氮气而排放，有机氮和无机氮之间无时无刻不发生着相互转化，这种多形态、多组分溶质间的转化作用使得对溶质运移的描述面临较大的挑战。

描述多孔介质中溶质运移的最重要的参数为水动力弥散系数，弥散系数的确定是分析溶质运移过程的关键。目前大都采用室内试验、野外示踪试验和经验估算等方法确定弥散系数。室内试

验结果与野外实际结果往往相差几个数量级，而野外试验费用昂贵、范围较小，难以真实地反映研究区域的地质参数变化情况。因此，溶质运移参数测定技术、可靠度、空间变异性、尺度效应、尺度提升等科学和技术问题有待于进一步探索。

地下水运动方程为标准的抛物型偏微分方程，有比较成功的数值求解方法。而描述多孔介质中溶质运移的对流-弥散方程，根据弥散系数与地下水流速的不同，具有双曲型或抛物型方程的性质，常用的数值方法易出现数值弥散和过量等数值现象，求解上具有较大困难。

由于天然土壤和含水层沉积过程的随机性，含水层的水文地质特征以及土壤的结构、构造和矿物组成等土壤特性具有明显的空间变异性。由此而引起的天然地质体的非均匀性可在各种不同尺度上反映出来。在采取的土样中，可以观测到土粒孔隙大小及团粒结构的差异；在大的区域含水层系统中，可以观测到不同含水层间以及同一含水层的不同地域间的变异性。对某一特定的含水层而言，其空间任一点含水层性质是确定的，如果我们得到了空间上每一点的测量数据，那么含水层性质的空间分布就是完全确定的。但在实际中，我们不可能得到空间每一点的资料，所得到的仅是其中一个样本。在含水介质空间变异性的影响下，地下水运动也具有相应的不确定性和空间分布不规则的特性。可见，应用确定性方法处理非确定的地下水运动问题具有很大的局限，必须探讨新的理论和方法来研究此问题。

运用随机模型模拟多孔介质中地下水流及污染物的运移方法在国外发展迅速（Dagan,1989；Gelhar,1992；杨金忠等，2000；Zhang,2002）。可以预料，通过介质分布的随机特征，可以得到地下水水头分布的随机特征。试验研究表明，溶质在小尺度范围运移所确定的方程和弥散系数不能描述溶质在大区域范围内的运动特征和规律，在野外大区域所求得的弥散度值在10^{-1}~10^{3}m量级范围内，弥散度随着区域尺度的增大而增加。控制大区域溶质运移不确定性的机理在于宏观地下水流速的不均匀性，而地下水流速度的不均匀性主要起源于储水介质沉积特征和水力特征的空间变异性，这些影响区域溶质运移的基本特征在室内实验中是反映不出来的。正如研究水动力弥散时分子扩散可以忽略一样，小范围测得的弥散度对大区域溶质的分散过程可以忽略不计。因而，微观的水动力弥散理论不能用于宏观的研究。另外，边界条件、起始条件、溶质转化参数等都可能具有不确定性和随机性，因此，描述地下水和溶质运移的微分方程变为随机微分方程，得到的定解问题变为随机定解问题。求解随机定解问题的困难之一是计算工作量很大，发展新的数值方法和模型解决随机定解问题是目前研究的重要内容。近二十年来，由于一些国家对高放射性核废料进行地质处置的关注，部分学者对基岩裂隙介质地下水流及溶质运移模型进行研究，取得了重要突破。但地下水运动随机理论研究用于解决实际问题的、特别是成功解决的还很少。

在实际应用中还有其他大量与地下水运动密切相关的模型，如地下水中的热流运动模型、裂隙介质中的水分运移模型、地面沉积模型、堤坝渗流模型等，由于篇幅所限，本书未作介绍。这些模型构建所采用的基本理论、研究思路和数学方法与本书所介绍的模型基本相同，本书仅给出了求解这些模型的基础，有兴趣深入了解以上模型的读者可阅读其他相应专著。

第一章　地下水运动的基础理论

第一节 地下水运动的基本概念

一、 渗流的概念

地下水科学首先要研究地下水在岩土多孔介质中的运动规律。

多孔介质由固体和空隙两部分组成，水只能在介质的空隙中流动。由于固体边界的几何形状较为复杂，导致空隙中地下水运动要素的分布变化无常，要想得到其中任一点（或微观水平上）的地下水运动规律是极其困难的，也是不现实和没有必要的。

我们的目的是避开从微观的角度去直接研究单个地下水质点的运动特征，转而从宏观水平上考察地下水在多孔介质中的平均运动规律，把实际上并不处处连续的水流看成连续水流，使多孔介质空间内任一点的物理量都能用坐标的连续函数来描述，从而可以用连续函数理论研究复杂的地下水流问题。为此，引入一个假想的水流代替真实的地下水流。这种假想水流具有以下特征：充满了多孔介质的全部空间（包括空隙和固体部分）；在任一点所受的阻力与实际水流在空隙中所受的阻力相同；任一点的压力（或水头）和流速分别等于实际水流在该点周围一个小范围内的平均压力（或水头）和流速，称这种假想水流为渗透水流，简称渗流。假想水流所占据的空间区域称为渗流区或渗流场，是包括空隙和固体颗粒在内的全部区域。

为了实现这种假想，需要引入“典型单元体（积）”（Representative Elementary Volume，REV）的概念，对多孔介质空间中任一点上描述宏观运动的各物理量（如流速 v、压强 p、水头 H、孔隙率 n 等）作出定义。以孔隙率 n 为例，假设 P 是多孔介质中的一个数学点（该点可以位于空隙空间里，也可位于骨架颗粒内），以 P 为中心，任取一体积 V_i，以 V_i 内所包含的孔隙率的平均值 n_i 作为 P 点的宏观（平均）孔隙率值。按孔隙率的定义，有

$$n_i = \frac{(V_v)_i}{V_i} \tag{1.1.1}$$

式中：$(V_v)_i$ 是 V_i 中的孔隙体积。

当所取的体积 V_i 大小不同时，孔隙率 n_i 的值可能发生变化。若以 P 点为中心取一系列不同大小的体积 V_i (i=1,2,…,N)，可相应得到一系列的孔隙率 n_i (i=1,2,…,N)，作 n_i 与 V_i 的关系曲线，如图 1.1 所示。由图可见，当 V_i 由充分大逐步缩小到 P 点的过程中，不论多孔介质是均质的还是非均质的，相应的孔隙率 n_i 都有一个实际上可视为常数的区间，如图中[$V_{\min}$, $V_{\max}$]区间。当 $V_i < V_{\min}$ 时，n_i 值呈现出很大的波动，这种波动是因为 V_i 过小时，其中包含的颗粒与孔隙相对很少，以致在这个很小的范围内，它们的随机分布的某些不规律性明显表现出来。当 V_i 小到接近于单个孔隙或颗粒大小时，这种波动就会更大。当 P 点位于固体颗粒中心，且 V_i 只取小于或等于颗粒的体积时，则孔隙率 $n_i = 0$；当 P 点位于孔隙中心，且 V_i 只取小于或等于孔隙的体积时，则孔隙率 $n_i = 1$。显然当 $V_i < V_{\min}$ 的情况不能反映多孔介质中物理量的连续性。当 $V_i > V_{\max}$ 时，非均匀介质中的 n_i

值会明显偏离[V_{min} , V_{max}]区间内的 n_i 值，或者偏大，或者偏小；而均匀介质中仍保持不变。由上述分析可知，合适的体积大小应该位于[V_{min} , V_{max}]区间内，当 V_i 趋于这一体积时，相应的孔隙率趋于某一平均值 n，称该体积为“典型单元体（积）”，记为 V_0（$V_{min} < V_0 < V_{max}$）。这个 V_0 就是以 P 点为中心应选取的适当的体积大小，它与单个孔隙、单个颗粒及流体质点相比是充分大，而与多孔介质所占据的整个空间区域相比则是充分小，也可把 V_0 称为在数学点 P 处多孔介质的物理点或物质点，并将包含在 V_0 中的所有流体质点与固体颗粒的总体，称为多孔介质质点。多孔连续介质就是由这些连续分布的多孔介质质点组成的。

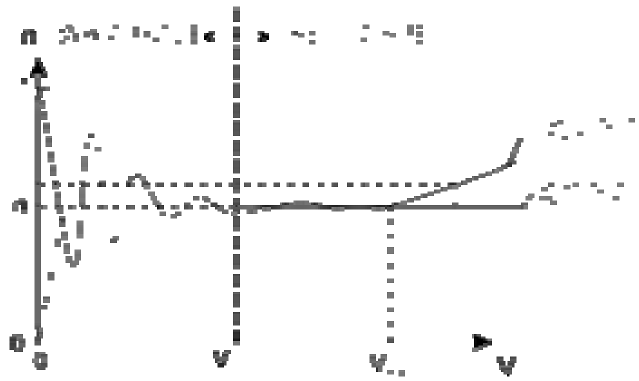


图 1.1　孔隙率及典型单元体的定义

基于以上分析，可以利用“典型单元体（积）” V_0 来定义任一点 P 的孔隙率 $n(P)$，即

$$n(P) = \lim_{V_i \to V_0} \frac{V_v}{V} \tag{1.1.2}$$

或

$$n(P) = \frac{V_{0v}}{V_0} \tag{1.1.3}$$

式中：V_{0v} 是典型单元体（积）V_0 中的孔隙体积。

上述定义的孔隙率是在一定体积范围内取平均值，属于体（积）孔隙率；也可以在面积上或线上取平均值，称面孔隙率或线孔隙率，即

$$n(P) = \frac{A_{0v}}{A_0} \qquad \text{和} \qquad n(P) = \frac{L_{0v}}{L_0} \tag{1.1.4}$$

式中：A_0 和 A_{0v} 分别是典型单元面积（Representative Elementary Area , REA）和其中的孔隙面积；L_0 和 L_{0v} 分别是典型线元（Representative Elementary Line , REL）的长度和其中的孔隙长度。

用同样的方法，P 点的其他物理量都可以通过在典型单元体内取平均值而获得。这样，通过典型单元体就能以假想的连续体代替实际的多孔介质。

二、　渗流运动要素

描述渗流场运动特征的各物理量（水头、水压、流速等）称为运动要素。

（一） 孔（空）隙平均流速（地下水实际流速）和渗透流速（达西流速）

利用典型单元体的概念，可将真实的地下水质点流速矢量转化为多孔介质连续体上的流速矢量。

在前面渗流概念的基础上，可将空隙中地下水质点流速矢量 $\boldsymbol{u}'$在整个典型单元体 V_0（包括空隙和固体部分）上取平均值，即

$$\boldsymbol{v}\left(P\right)=\frac{1}{V_0}\int_{V_{0v}}\boldsymbol{u}'\,\mathrm{d}V_v=\frac{1}{V_0}\int_{V_0}\boldsymbol{u}'\,\mathrm{d}V_v \tag{1.1.5}$$

称 $\boldsymbol{v}(P)$为多孔介质连续体中 P 点的渗流速度矢量，也称达西流速矢量。由于通过固体的 $\boldsymbol{u}'=0$，故式(1.1.5)中的第二个等式也是成立的。渗流的过水断面是包括固体颗粒在内的多孔介质连续体（而实际的地下水流只是在空隙中流动），因此，渗透流速是个假想的流速，利用它可以方便地计算通过某一过水断面的流量 Q，即 $Q = vA$，其中 A 是多孔介质连续体的过水断面面积（包括空隙和固体部分），这在连续体内取值十分方便。

若将空隙中地下水质点流速矢量 $\boldsymbol{u}'$在典型单元体的空隙部分 V_{0v} 中取平均值，即

$$\boldsymbol{u}\left(P\right)=\frac{1}{V_{0v}}\int_{V_{0v}}\boldsymbol{u}'\,\mathrm{d}V_v \tag{1.1.6}$$

称 $\boldsymbol{u}(P)$为多孔介质连续体中 P 点的孔隙平均流动速度，也称为地下水实际流速，在地下水溶质运移问题研究中使用比较方便。

对比式(1.1.5)和(1.1.6)可以看出，地下水实际流速 $\boldsymbol{u}$ 与渗透流速 $\boldsymbol{v}$ 之间存在下列关系：

$$\boldsymbol{v}=\frac{V_{0v}}{V_0}\boldsymbol{u}=n\boldsymbol{u} \tag{1.1.7}$$

引进渗透流速的概念后，渗流场内地下水流的实际流线（图 1.2）就可以用以渗流速度为基础的虚构流线来表示（图 1.3）。垂直于所有流线的断面 AB 称为渗流断面（过水断面）。渗流断面可以是平面也可以是曲面。单位时间内通过渗流断面的地下水体积称为渗透流量。

根据渗透流速方向与空间坐标轴的关系，可以把地下水流分为一维运动、二维运动和三维运动。只沿一个坐标轴方向有水流运动，其余坐标轴方向的分速度为零的运动称为地下水的一维运动；沿两个坐标轴方向有分速度，仅在一个坐标轴方向的分速度为零，这类运动称为地下水的二维运动；沿三个坐标轴方向都有分速度的地下水流运动称为三维运动。

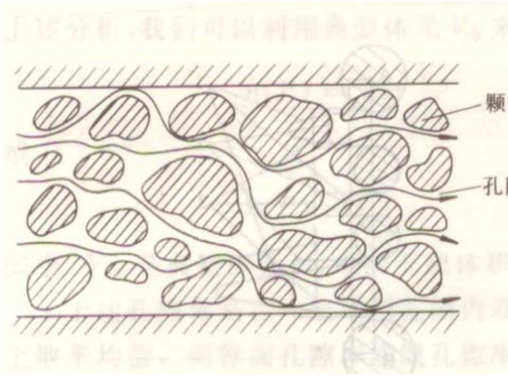


图 1.2 地下水实际流线

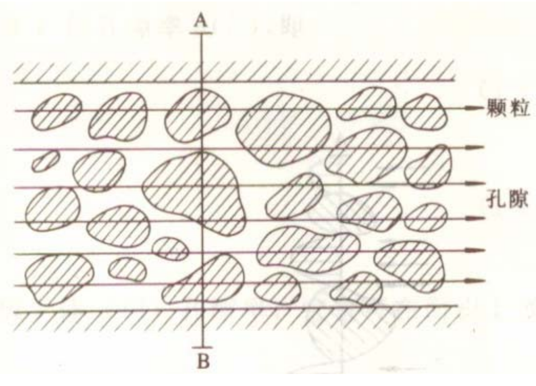


图 1.3 基于渗透流速的流线

（二） 地下水水头

P 点宏观水平的水头 H 可定义为

$$H\left(P\right)=\frac{1}{V_{0v}}\int_{v_{0v}} H\,\mathrm{d}V_v \tag{1.1.8}$$

根据水力学中关于水头的概念，渗流场中任一点的总水头是该点的位置势能、压力势能和动能三者的总和，可用水柱高度来表示，即

$$H=z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g} \tag{1.1.9}$$

式中：右端第一项 z 为位置高度（或位置水头）[L]；第二项 $h_p=\dfrac{p}{\gamma}$，称为测压高度[L]，其中 p 为地下水压强（不计大气压强），γ 为地下水容重；前两项之和表示单位重量液体所具有的势能，称为测压管水头 h（测压水头或压力水头），即

$$h=z+\frac{p}{\gamma} \tag{1.1.10}$$

式(1.1.9)右端第三项 $\dfrac{u^2}{2g}$ 为流速水头[L]。由于自然界中地下水的运动非常缓慢，相对于测压管水头而言，流速水头要小得多，一般情况下可忽略不计。因此，在地下水动力学中，可近似认为地下水的总水头在数值上近似等于测压水头，即

$$H\approx z+\frac{p}{\gamma}=h \tag{1.1.11}$$

位置高度 z 的数值大小随所选取的基准面的位置而变化，因此，选取的基准面位置不同，测压管水头值也就不同。但在实际计算中，一般不关心水头的绝对值，而是关心不同空间位置上的水头差值，因而基准面可任意选取。为了计算方便，常把基准面取在含水层的水平隔水底板上。因而，渗流场内任意点的水头值大小可以从基准面到揭穿该点井孔的水位处的垂直距离来表示（图 1.4，图 1.5）。

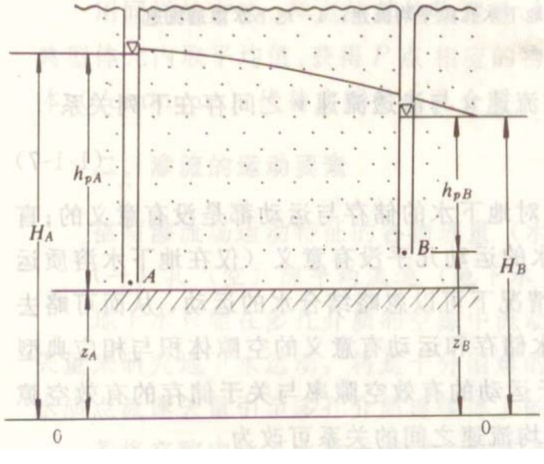


图 1.4 潜水含水层中的测压高度及水头

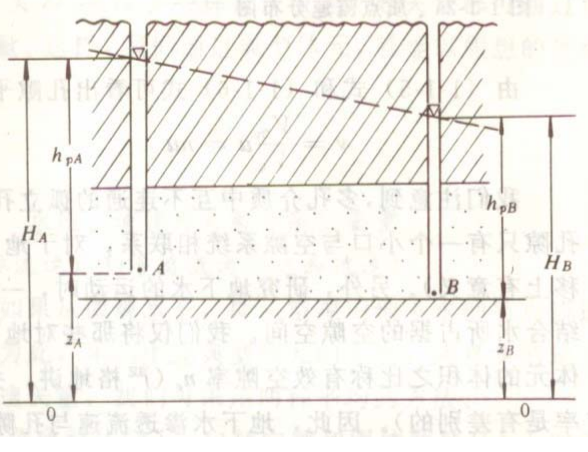


图 1.5 承压含水层中的测压高度及水头

（三） 等水头面和水力坡度

地下水在空隙介质中流动会因克服摩擦阻力而产生水头损失，使得沿流线方向各点的水头值不等。把渗流场内水头值相等的各点连成面，称为等水头面。根据水流的特点，等水头面可以是平面，也可以是曲面。它在平面图上或剖面图上则表现为水头相等的线，称为等水头线。等水头面（线）在渗流场中是连续的，不同数值的等水头面（线）不会相交。

渗流场中各点的水头是随空间和时间变化的，可表示为 $H=H(x,y,z,t)$，它构成一个标量场。该标量场构成的梯度大小为 $\left|\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}n}\right|$，方向沿等水头面（线）法线并指向水头增高的方向，此方向上的水头变化率最大。在地下水动力学中，把大小等于梯度值，方向沿等水头面（线）法线指向水头降低方向的矢量称为水力坡度，用 $\boldsymbol{J}$ 表示，即

$$\boldsymbol{J}=-\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}n}\boldsymbol{n} \tag{1.1.12}$$

式中：$\boldsymbol{n}$ 为法线方向单位矢量。水力坡度 $\boldsymbol{J}$ 在空间坐标系中的三个分量分别为

$$\boldsymbol{J}_x=-\frac{\partial H}{\partial x}\boldsymbol{i}，\ \boldsymbol{J}_y=-\frac{\partial H}{\partial y}\boldsymbol{j}，\ \boldsymbol{J}_z=-\frac{\partial H}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{1.1.13}$$

第二节　达西定律与连续性方程

一、 达西定律

1856 年法国水力工程师达西（Henry Darcy）通过研究水在直立均匀砂柱中的渗流试验，得到了著名的达西公式：

$$Q=KA\frac{h_1-h_2}{L}=KAJ \tag{1.2.1}$$

$$v=\frac{Q}{A}=KJ \tag{1.2.2}$$

式中：Q 为渗流量；K 为渗透系数或水力传导度；A 为砂柱的横截面积，即渗流过水断面面积；(h_1-h_2)和 L 分别为砂柱顶底断面上的测压水头差和渗流路径长度；J 为水力坡度，对于均匀介质的一维流动，渗流段内各点的水力坡度均相等；v 为渗透速度，又称达西流速，它是通过包括固体颗粒在内的过水断面上的平均流速。

达西公式建立了流量（或流速）与水头之间的关系，反映了多孔介质中水流的宏观运动规律，后人称之为达西定律，也是渗流的基本定律。达西定律表明，地下水流动通量与水力坡度成线性关系，故又称为线性渗透定律。

达西定律是在一维均质和不可压缩流动条件下得到的地下水的宏观流动规律。若将其用于二维或三维的地下水运动，则水力坡度不是常量（沿流向是变化的），应该用微分形式表示，即

$$v = KJ = -K\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} \tag{1.2.3}$$

式中: $-\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}$是沿流线任一点的水力坡度，$s$ 为渗流途径。在直角坐标系中，沿三个坐标轴方向的渗流速度分量可表示为

$$v_x = -K\frac{\partial h}{\partial x},\quad v_y = -K\frac{\partial h}{\partial y},\quad v_z = -K\frac{\partial h}{\partial z} \tag{1.2.4}$$

若已知水头函数 $H(x,y,z)$，可由(1.2.4)式计算出渗流场内任一点的渗流速度矢量 $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \tag{1.2.5}$$

式中: $\boldsymbol{i}$ 、$\boldsymbol{j}$ 、$\boldsymbol{k}$ 分别为三个坐标轴上的单位矢量。式(1.2.5)给出了渗流速度场与水头场之间的关系。

达西定律只适用于雷诺数不超过 1～10 的层流运动的范围，此间液体的黏滞力占优势，地下水流动速度低。超出这个范围，地下水运动不再符合达西定律。大空隙和岩层裂隙中的水流，惯性力起主要作用，雷诺数较大，水流结构复杂，此时达西定律不适用。然而，绝大多数的天然地下水运动都是服从达西定律的。

二、 渗透系数、渗透率和导水系数

渗透系数 K 又称水力传导度或导水率，是反映含水层透水性能的一个极其重要的水文地质参数。大量研究结果表明，K 是一个既反映岩石孔隙介质特性（如粒度成份、颗粒排列、充填状况、裂隙性质和发育程度等），又反映流体性质（如容重、黏滞性等）对地下水流动影响的综合参数。根据式(1.2.2)，当水力坡度 $J=1$ 时，渗透系数在数值上等于渗透速度，并具有速度的量纲。

对于水力坡度保持不变的地下水流，渗透速度 v 应与反映孔隙面积大小的参数 d^2 及水的容重 ρg 成正比，与反映流动摩擦阻力的黏滞系数μ（或动黏滞系数$\upsilon=\mu/\rho$）成反比。根据上述分析，地下水流速可表示为

$$v = -cd^2\frac{\rho g}{\mu}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} \tag{1.2.6}$$

式中: c 为比例系数；ρ、μ与流体性质有关。对比式(1.2.3)，可得如下关系

$$K = cd^2\frac{\rho g}{\mu} = k\frac{\rho g}{\mu} = k\frac{g}{\upsilon} \tag{1.2.7}$$

这里，$k=cd^2$ 与组成含水层介质的孔隙尺度大小、形状、结构等特征有关，反映了含水层孔隙介质内在渗透性能，称为内在渗透率（或渗透率）[L^2]。显然，渗透率仅仅取决于岩石的性质，与液体的性质无关。

当地下水的温度和矿化度变化不大时，水的容重和黏滞性一般也不会有大的变化，渗透系数 K 可视为常数。但对于热水或卤水的运动，容重和黏滞性是变化的，此时 K 就不能视为常数。

一般来说，渗透系数 K 和渗透率 k 是不随时间变化的，但在某些特殊情况下，如在外部荷重作用下引起固结和压密、固体骨架的溶解和存在于空隙中间黏土的膨胀等，也会引起 K 和 k 随时间的改变。

根据含水层渗透系数 K 在空间和方向上的变异特征，可将含水层分为均质与非均质、各向同性与各向异性含水层。若含水层的 K 值是空间坐标的函数 $K=K(x,y,z)$，称为非均质含水层。如果

含水层的 K 与渗流方向无关，称为各向同性含水层。相反，则为各向异性含水层。

含水层输水能力的大小，不仅决定于渗透系数 K，还和含水层的厚度有关，为此，引出了导水系数 T 的概念。定义为

$$T = KM \tag{1.2.8}$$

式中: M 为含水层的厚度。

导水系数 T 的物理意义是单位宽度含水层在单位水力梯度作用下的水流通量，量纲为[L^2/T]。严格地讲，只有平面流动的承压含水层，才有按式(1.2.8)定义的导水系数，因无压（潜水）含水层没有严格意义下的平面流动，含水层厚度沿流程是变化的；在非稳定流中，过水断面随时间又是变化的。对于非稳定的无压渐变流，可根据含水层的平均厚度 $\overline{H}$ 定义导水系数，即

$$T = K\overline{H} \tag{1.2.9}$$

这里的 $\overline{H}$ 应取无压含水层在空间和时间上的平均值。再强调一点的是，导水系数的概念仅适用于二维地下水流动，对于三维流动是没有意义的。

三、 地下水运动连续性方程

连续性方程反映了流体运动的质量守恒原理，地下水运动的连续性方程也称水均衡方程。为反映一般情况，在各向异性的多孔介质中建立地下水三维不稳定流动连续性方程。假定水是可压缩的，多孔介质骨架在垂直方向可压缩，但水平方向不可变形。为方便起见，取直角坐标系的 x、y、z 轴分别平行于各向异性岩层渗透系数的主方向。

在地下水渗流区域内以 $P(x, y, z)$点为中心取一个体积无限小的平行六面体作为均衡单元体，单元体各边长分别为Δx、Δy、Δz，并与坐标轴平行（图 1.6）。

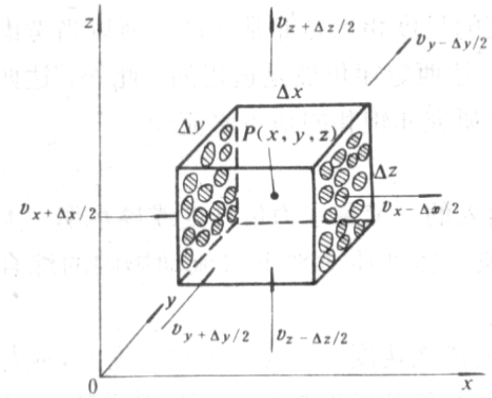


图 1.6 渗流区中的均衡单元体

设 P 点处地下水流速分量为 v_x、v_y、v_z，水的密度为ρ，则单位时间内通过垂直于坐标轴方向的单位面积的水流质量分别为ρv_x、ρv_y、ρv_z。于是，在Δt 时段内，沿 x 方向流入流出单元体的水流质量差为

$$\left(\rho v_{x-\frac{\Delta x}{2}} - \rho v_{x+\frac{\Delta x}{2}}\right)\Delta y \Delta z \Delta t$$

其中，$\rho v_{x-\frac{\Delta x}{2}} = \rho v_x\left(x-\dfrac{\Delta x}{2}, y, z\right)$，$\rho v_{x+\frac{\Delta x}{2}} = \rho v_x\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}, y, z\right)$，利用 Taylor(泰勒)级数展开并略去二阶导数以上的各项，可得到

$$\begin{aligned}
&\left(\rho v_{x-\frac{\Delta x}{2}} - \rho v_{x+\frac{\Delta x}{2}}\right)\Delta y\Delta z\Delta t \\
&= \left\{\left[\rho v_x - \frac{1}{2}\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\Delta x\right] - \left[\rho v_x + \frac{1}{2}\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\Delta x\right]\right\}\Delta y\Delta z\Delta t \\
&= -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t
\end{aligned}$$

同理，可得到沿 y 方向和 z 方向流入流出单元体的水流质量差分别为

$$-\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

$$-\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

可见，在Δt 时段内流入流出单元体的水流总质量差等于上述三项之和。

均衡单元体内，水所占的体积为 $n\Delta x\Delta y\Delta z$，其中 n 为孔隙度，则单元体内水的质量为$\rho n\Delta x\Delta y\Delta z$。由此可得，在$\Delta t$ 时段内单元体内水流质量（即储存质量）的变化量为

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho n\Delta x\Delta y\Delta z]\Delta t$$

在无源和汇的情况下，单元体内水质量的变化是由流入和流出该单元体的水质量差所造成的，根据质量守恒原理，两者应相等，即

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]\Delta x\Delta y\Delta z = \frac{\partial}{\partial t}[\rho n\Delta x\Delta y\Delta z] \tag{1.2.10}$$

式(1.2.10)为地下水流连续性方程的一般形式。

若不考虑单元的体积变化，上式可简化成

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right] = \frac{\partial(\rho n)}{\partial t} \tag{1.2.11}$$

如果把地下水看作是不可压缩的均质液体（ρ＝常数），同时假设含水层骨架不被压缩（n、Δx、Δy、Δz 都保持不变），则有

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{1.2.12}$$

连续性方程是研究地下水运动的基本方程，各种地下水运动的微分方程都是根据连续性方程和反映能量守恒与转化定律的方程建立起来的。

第三节 含水层的储水特性

含水层是一种在自然条件下形成的多孔介质，其中的孔隙空间可分为两类，一类是相互联通的孔隙，气相和液相物质可在其中流动，这类孔隙称为有效孔隙；有些孔隙是封闭或半封闭的，存于这些孔隙中的气相和液相物质几乎不可流动，相对于水的运动而言，这类孔隙为无效孔隙，其中的水体称为不动水体。可动水体和不动水体对于多孔介质中溶质运移具有重要意义。

一、 水和多孔介质的压缩性

（一） 水的压缩性

含水层中的水体体积和密度受力后将发生变化。在等温条件下，受力时水体积 V（或密度ρ）的变化特性用水的压缩系数β 表示，即在单位压力变化时单位体积中水体积的变化量。

$$\beta = -\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} \tag{1.3.1}$$

对于一定质量 m 的水，其体积可表示为 $V = m/\rho$，取微分后有

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}\left(m/\rho\right) = -\frac{m}{\rho^2}\mathrm{d}\rho = -\frac{V}{\rho}\mathrm{d}\rho$$

将上式代入式(1.3.1)，则有

$$\beta = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p} \tag{1.3.2}$$

对于地下水来说，β 可认为是一常数。

（二） 含水层的压缩性

位于地下某一深度的含水层介质始终受到上覆岩层骨架和水、地表建筑物等荷载压力的作用。对于稳定的含水层来说，其内部任一点所受的应力应处于平衡状态。当只考虑含水层的垂向压缩（忽略侧向粒间力的作用）时，作用于饱和含水介质上的总应力（单位面积上的总压力）σ，应与介质骨架承受的压应力σ_e（也称为有效应力）及孔隙中水体压力 p 两者之和相平衡：

$$\sigma = \sigma_e + p$$

当含水层埋藏较深时，总应力σ 可假定为常数。因而当含水层中抽水或注水引起水压力降低（或上升）时，这部分原来由水承担的压力将转嫁到含水层介质骨架上，导致介质骨架的有效应力增加（或降低），即

$$\mathrm{d}\sigma_e = -\mathrm{d}p$$

此式说明，当含水层中水的压力因抽水等原因而减小（$\mathrm{d}p<0$）时，骨架的有效应力就会增大（$\mathrm{d}\sigma_e>0$），从而引起骨架的压缩。这就是含水层骨架的压缩性，反过来也成立。为此，可以把含水层作为弹性体处理，用压缩系数α 表示含水层骨架的弹性变形，有

$$\alpha = -\frac{1}{V_t}\frac{\mathrm{d}V_t}{\mathrm{d}\sigma_e} \tag{1.3.3}$$

压缩系数的物理意义是单位有效应力σ_e的变化引起的含水层骨架体积 V_t的相对变化（即单位体积含水层骨架的体积变化率），负号表示随着有效应力σ_e增加，含水层体积变小时α 为正。

含水层骨架的体积包括固体颗粒的体积 V_s和空隙的体积 V_v，而固体颗粒一般是不可压缩的，即 $V_s = (1-n)\,V_t =$ 常数，则

$$\frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}\sigma_e} = 0$$

由此可得

$$\frac{\mathrm{d}V_t}{\mathrm{d}\sigma_e} = \frac{V_t}{(1-n)}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\sigma_e} \tag{1.3.4}$$

将式(1.3.4)代入式(1.3.3)，有

$$\alpha = -\frac{1}{(1-n)}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\sigma_e} = \frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}p} \tag{1.3.5}$$

考虑含水层压缩时侧向受到限制，一般只是垂向压缩，此时压缩系数可表示为

$$\alpha = -\frac{1}{\Delta \mathrm{z}}\frac{\mathrm{d}(\Delta \mathrm{z})}{\mathrm{d}\sigma_e} = \frac{1}{\Delta \mathrm{z}}\frac{\mathrm{d}(\Delta \mathrm{z})}{\mathrm{d}p} \tag{1.3.6}$$

需要说明的是，含水层并非理想的弹性体，随着水压力的降低，含水层骨架会产生压缩变形，但当水压力上升（或有效应力解除）至原有状态时，含水层的变形一般无法完全恢复，可恢复的部分为弹性变形，不能恢复的部分属塑性变形，永久性的地面沉降就是这个原因。

二、 承压含水层的储水特性

从数量上表征承压含水层弹性储水（释水）特性的参数是储水率μ_e^* 和储水系数μ_e。

（一） 储水率μ_e^*（或 S_s）和储水系数μ_e（或 S）

当承压含水层的压力水头下降（或上升）一个单位时，从单位体积含水层中释放（或储存）的水量（图 1.7）称为储水率μ_e^* [L^{-1}]：

$$\mu_e^* = \frac{\Delta V_w}{V_t \Delta h} \tag{1.3.7}$$

式中: Δh 为承压含水层压力水头的变化值；ΔV_w 为当压力水头变化Δh 时，从体积为 V_t 的含水层中释放（或储存）的水量。

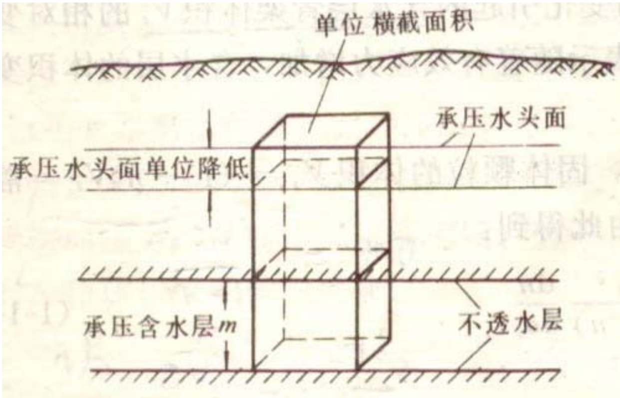


图 1.7 承压含水层的储水特性

当承压含水层的压力水头下降（或上升）一个单位时，从单位水平面积、高度为含水层厚度 M 的含水层柱体中释放（或储存）的水量称为储水系数μ_e（无因次）：

$$\mu_e = \frac{\Delta V_w}{A\,\Delta h} \tag{1.3.8}$$

式中：A 为含水层的水平面积。

显然有，$\mu_e = M\mu_e^*$。

（二） 储水率μ_e^*（或 S_s）的表达形式

承压含水层类似于一个弹性容器，当从容器内抽水时，水压力下降($-\mathrm{d}p$)，为了平衡上覆荷载的压力，$-\mathrm{d}p$ 必转嫁到含水层骨架上，引起固体骨架承受的有效应力增加($\mathrm{d}\sigma_e = -\mathrm{d}\ p$)，导致含水层压缩，压缩规律用压缩系数$\alpha$ 描述。同时由于水压力下降，将导致水体积膨胀，膨胀规律由水的压缩系数β 描述。

根据上述释水机理可推求μ_e^*的表达形式。设单位体积含水层因骨架压缩释放的水量为$\mathrm{d}V'_w$，由式(1.3.5)，有

$$\mathrm{d}V'_w = -\mathrm{d}V_t = \alpha V_t \mathrm{d}\sigma_e = -\alpha V_t \mathrm{d}p \tag{1.3.9}$$

根据关系$h = z + \dfrac{p}{\gamma}$，$\gamma\,\mathrm{d}h = \mathrm{d}p$ 或$\rho g \mathrm{d}h = \mathrm{d}p$，当水头下降一个单位（$\mathrm{d}h = -1$）时，因单位体积含水层（$V_t = 1$）压缩释放的水量为

$$\mathrm{d}V'_w = -\alpha\rho g \mathrm{d}h = \alpha\rho g \tag{1.3.10}$$

另设因水的膨胀而产生的水体积为$\mathrm{d}V''_w$，由于 $V_w = nV_t$ ，对于单位体积含水层（$V_t = 1$）发生单位水头下降（$\mathrm{d}h = -1$）时，因水体积膨胀释放的水量为

$$\mathrm{d}V''_w = -\beta V_w \mathrm{d}p = -\beta n V_t \rho g \mathrm{d}h = \beta n \rho g \tag{1.3.11}$$

根据上述两种释水机制的作用结果，可得到当单位压力水头下降时从单位体积含水层中，由于含水层骨架压缩和水体膨胀而释放的水量μ_e^*（储水率）为

$$\mu_e^* = \alpha\rho g + \beta n\rho g = \rho g(\alpha + \beta n) \tag{1.3.12}$$

储水率综合表达了含水层的压缩和水体膨胀的数量特征，是承压含水层中非常重要的水文地质参数。对于一般常见的砂性和粘性质地的孔隙介质来说，含水层的压缩系数比水的压缩系数大1～2 个数量级，可认为从承压含水层中抽出的水量主要来自含水层骨架的压缩。

三、 潜水含水层的储水特性

与承压含水层的储水系数的概念类似，也可以定义潜水含水层的储水系数μ 为：当潜水水位下降一个单位时，从单位水平面积、含水层厚度为 h 的含水层中释放出来的水量（图 1.8）。潜水的储水系数又称为给水度（当水位下降时）或饱和差、自由孔隙率（当水位上升时），一般用μ 表示，其表达形式同式(1.3.7)，即

$$\mu = \frac{\Delta V_w}{A\,\Delta h} \tag{1.3.13}$$

式中：Δh 为潜水位下降值。

潜水含水层与承压含水层的储水系数虽然形式上相同，但它们所反映的释水机理不同。承压含水层是弹性释水，主要靠含水层骨架的压缩和水体膨胀释放水量，没有含水层的疏干，且是瞬时完成的。潜水含水层主要是重力释水，虽然随着潜水位下降也发生含水层压缩而产生弹性释水，但这部分水量占释水总量的比例很少。潜水含水层在释水过程中会发生含水层的疏干，并伴随着非饱和区土壤水分的流动，由于土壤水分流动速度很慢，因此潜水含水层的重力释水过程是一个与时间有关的缓慢过程，这种现象称为潜水含水层的滞后释水现象。含水层的土质愈细，重力释水过程进行得愈缓慢。

在地下水埋深较大的地区，当潜水位下降后并经过较长的重力释水过程，可使潜水面以上的非饱水分分布达到稳定状态，此时潜水面以上含水率剖面分布可以近似认为是水位下降前稳定含水率剖面分布曲线的平行下移（图 1.9）。此时给水度μ 的大小可用两个稳定含水率剖面间的含水量差值来计算：

$$\mu = \theta_s - \theta_f \tag{1.3.14}$$

式中：θ_s 为饱和含水率，θ_f 为田间持水率，均以土层中孔隙体积的百分数表示，μ 是无因次量。在排水工程规划设计中，给水度具有十分重要的意义。

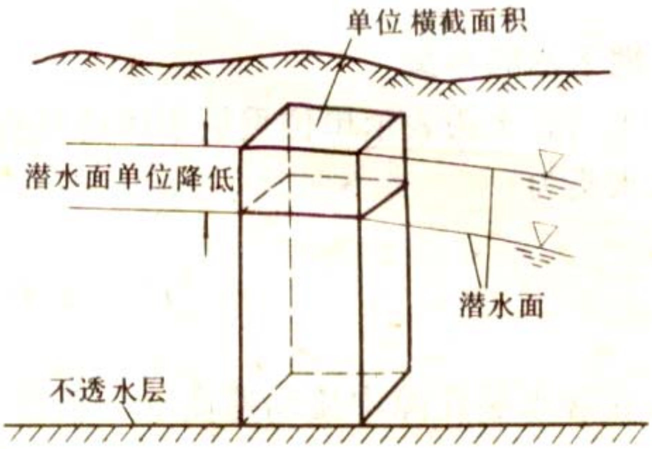


图 1.8　潜水含水层储水特性

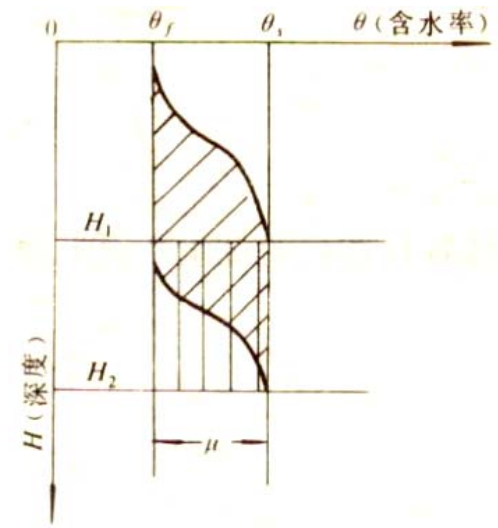


图 1.9　　潜水含水层水位下降前后含水率剖面分布

第四节　地下水运动的微分方程和定解条件

一、　承压水运动的基本微分方程

对于区域性地下水运动，含水层厚度与地下水水平流动的空间尺度相比是很小的，可作一假设，认为地下水流动主要是沿水平面方向进行，垂向流速可以忽略，即 $\dfrac{\partial h}{\partial z} \approx 0$。这一假设大大降低了研究承压含水层中地下水运动的难度。

如果只考虑含水层在垂直方向上的压缩性，连续性方程(1.2.10)中水的密度ρ、孔隙率 n 和单元体高度Δz 均为变量，并随水的压力 p 的变化而变化，则右端项展开成为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho n\Delta x\Delta y\Delta z\right]=\left[n\Delta z\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\Delta z\frac{\partial n}{\partial t}+n\rho\frac{\partial(\Delta z)}{\partial t}\right]\Delta x\Delta y \tag{1.4.1}$$

把式(1.3.2)、(1.3.5)、(1.3.6)代入(1.4.1)式，整理后得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho n\Delta x\Delta y\Delta z\right]&=\left[n\Delta z\rho\beta\frac{\partial p}{\partial t}+\rho\Delta z(1-n)\alpha\frac{\partial p}{\partial t}+n\Delta z\rho\alpha\frac{\partial p}{\partial t}\right]\Delta x\Delta y\\&=\rho(\alpha+n\beta)\frac{\partial p}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z\end{aligned} \tag{1.4.2}$$

则连续性方程(1.2.10)成为

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]\Delta x\Delta y\Delta z=\rho(\alpha+n\beta)\frac{\partial p}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z \tag{1.4.3}$$

由于 $h=z+\frac{p}{\gamma}$， $p=\gamma(h-z)=\rho g(h-z)$，有

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\rho g\frac{\partial h}{\partial t}+(h-z)g\frac{\partial\rho}{\partial t}=\rho g\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{p}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{1.4.4}$$

将式(1.3.2)代入式(1.4.4)右端第二项，整理后得

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\rho g}{1-\beta p}\frac{\partial h}{\partial t}$$

考虑水的压缩性很小，$1-\beta p\approx 1$，可得：

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\rho g\frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.4.5}$$

将式(1.4.5)代入式(1.4.3)，并展开左端项，有

$$\begin{aligned}&-\left[\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+\left(v_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+v_z\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\right]\Delta x\Delta y\Delta z\\&=\rho^2 g(\alpha+n\beta)\frac{\partial h}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z\end{aligned} \tag{1.4.6}$$

由于水的密度ρ 在空间的变化量远小于流速 v 在空间的变化量，故上式左端第二个括号项比第一个括号项小得多，可忽略不计，于是上式变为

$$-\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=\rho g(\alpha+n\beta)\frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.4.7}$$

上式代入达西定律和储水率后，若取坐标轴方向与主渗透方向一致，可得到非均质各向异性含水层中承压水运动的基本微分方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}\frac{\partial h}{\partial z}\right)=\mu_e^*\frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.4.8}$$

对于非均质各向同性介质，有 $K_{xx}=K_{yy}=K_{zz}=K(x,y,z)$，则微分方程成为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial h}{\partial z}\right)=\mu_e^*\frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.4.9}$$

对于均质各向同性介质，$K_{xx}=K_{yy}=K_{zz}=K=$ 常数，方程可简化为

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=\frac{\mu_e^*}{K}\frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.4.10}$$

近似认为承压含水层的平均厚度 M 为常数，渗透系数 $K=K(x, y)$仅是 x, y 的函数，则在任一垂直剖面上，导水系数 $T(x, y) = K(x, y)M$，弹性释水系数 $\mu_e=\mu_e^* M$ 。在平面二维流的情况下，可利用储水系数μ_e和导水系数 T 表示，对非均质各向同性含水层，有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial h}{\partial y}\right)=\mu_e\frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.4.11}$$

对均质各向同性含水层，平面二维地下水运动微分方程为

$$T\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)=\mu_e\frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.4.12}$$

或

$$a\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.4.13}$$

式中，$a=\dfrac{T}{\mu_e}\ \left[\mathrm{L^2\,T^{-1}}\right]$ 称为压力传导系数。

在轴对称情况下，利用柱坐标系更为有利。对于均质各向异性含水层，柱坐标系下三维承压地下水运动的基本微分方程为

$$K_r\left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}\right)+K_\theta\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}+K_z\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=\mu_e^*\frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.4.14}$$

对于均质各向同性含水层，上式可简化为

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=\frac{\mu_e^*}{K}\frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.4.15}$$

在二维情况下，可进一步简化为

$$a\left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}\right)=\frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.4.16}$$

对于轴对称的径向流，上式变为

$$a\left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}\right)=\frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.4.17}$$

上述方程是承压水非稳定运动的基本微分方程的几种不同形式，是研究承压含水层中地下水

运动的基础。方程反映了承压含水层中地下水运动的质量守恒关系，并通过达西定律反映了地下水运动中的能量守恒与转化关系。

在前述方程的建立中，仅考虑了均衡体表面的流入、流出量与均衡体内部弹性储存量的变化两个因素，没有考虑均衡体内产生水量（源）和消耗水量（汇）的因素，如入渗补给、蒸发排泄、抽水井、注水井等。这些因素的处理可根据具体情况或作为源汇项加入方程中，或作为边界条件加以刻画。对于入渗和蒸发，若为平面二维问题，往往视为面源和面汇；若是三维问题则属于上边界；对于抽水井和注水井，若将井视为一个点，则通常处理为点汇和点源（三维流问题称空间点汇、点源；平面二维流问题称平面点汇、点源）；若将井壁视为边界（渗流与水流的分界面），则可将井作为边界条件来刻画。

若考虑源汇的影响，在上述方程的左端加一源汇项，用 W 表示。W 也可以是空间和时间的函数。对于三维问题，W 表示单位时间从单位体积含水层流入或流出的水量；对于二维问题，W 表示单位时间从单位面积含水层中流入或流出的水量。其中流入为正，代表源；流出为负，代表汇。

加入源汇项后，式(1.4.9)成为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial h}{\partial z}\right)+W=\mu_e^*\frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.4.18}$$

式(1.4.11)成为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial h}{\partial y}\right)+W=\mu_e\frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.4.19}$$

对于抽水或注水井的点源或点汇，式(1.4.19)可变换为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\sum_i Q_i\delta\left(x-x_i,y-y_i\right)=\mu_e\frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.4.20}$$

式中：δ 函数定义为

$$\delta\left(x-x_i,y-y_i\right)=\begin{cases}1 & x=x_i,y=y_i\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

当地下水变化极其缓慢时，可近似看作为一种相对的稳定状态。令上述方程中右端的 $\frac{\partial h}{\partial t}$ 项等于 0，即可得到相应的稳定流运动方程。稳定运动方程意味着同一时间内流入单元体的水量等于流出的水量。

二、 潜水运动的基本微分方程

（一） 裘布依（Dupuit）假设

一般情况下，潜水面坡降和潜水流线的坡降比较平缓，潜水地下水流动可视为渐变流。在无入渗或蒸发条件下，潜水面应是一条流线。对于流动的潜水，潜水面不是水平的，从而等水头面就不是铅垂面（图 1.10a），即任一铅垂面上各点的水头 H 一般是不相等的。因此，潜水流速不仅有水平分量，也有垂直分量，潜水流属于三维流或剖面二维流问题，即 $H = H(x, y, z, t)$或 $H = H(x, z, t)$，这就给潜水运动的求解带来了困难。

1983 年，Dupuit 根据潜水的渐变流特点，提出假设：对于潜水面上无垂直补给和排泄的剖面二维稳定流（图 1.10a），潜水面是一条流线。通过潜水面上任一点 P 的流速 v_s 为

$$v_s = -K\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = -K\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = -K\sin\theta \tag{1.4.21}$$

式中：v_s 的方向在 P 点与潜水面相切；θ 为 v_s 与水平线的夹角。

裘布依假设认为，当潜水面坡度（θ 角）很小时，可近似用 $\mathrm{tg}\theta$ 代替 $\sin\theta$（图 1.4.1b），而 $\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x}$，从而有

$$v_s \approx v_x = -K\frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.4.22}$$

由于是剖面二维稳定流问题，式中的 H 仅随 x 变化，与 z 无关。

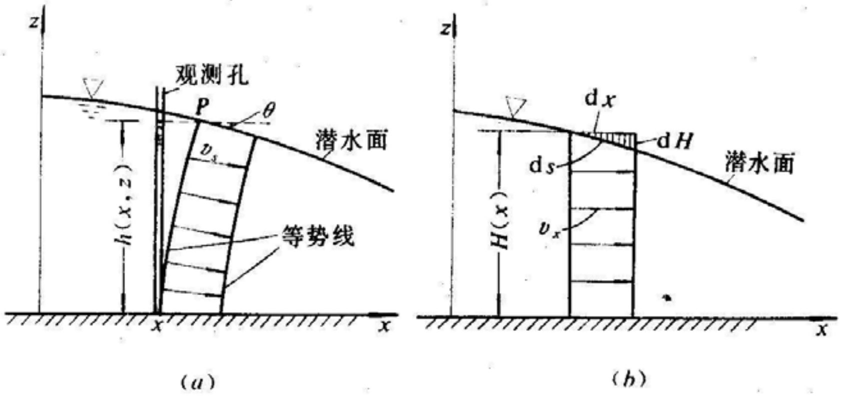


图 1.10　潜水流动的裘布依假设

(a) 通过位于潜水面上 P 点的实际等势线；(b) 引入裘布依假设后的垂直等势线

当隔水底板水平，并取隔水底板为基准面时，可得单宽流量 q_x 为

$$q_x = -Kh\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \tag{1.4.23}$$

式(1.4.2362)称为裘布依微分方程。

可以看出，裘布依假设实质上是在潜水垂向分速度 v_z 很小的情况下可将其忽略，把等水头面近似作为铅垂面，假设铅垂断面上不存在水力梯度和垂直流速。有了裘布依假设，可将平面二维 (x, z) 流动降为一维 (x) 流动，将空间三维 (x, y, z) 流动降为平面二维 (x, y) 流动，z 不再作为独立变量出现，从而简化了计算。但由于作了假设，据此得出的解（水头）只是一种近似解。然而，经验计算表明，当潜水面坡度 i 满足 $i^2 \ll 1$ 时，由裘布依假设产生的误差是很小的。但对于垂直流动分量较大的地下水流动区则是不适用的，如在非完整抽水井和非完整排水沟的中心和附近区域、渗出面附近、有入渗的潜水分水岭地段和垂直隔水边界附近等，见图 1.11。

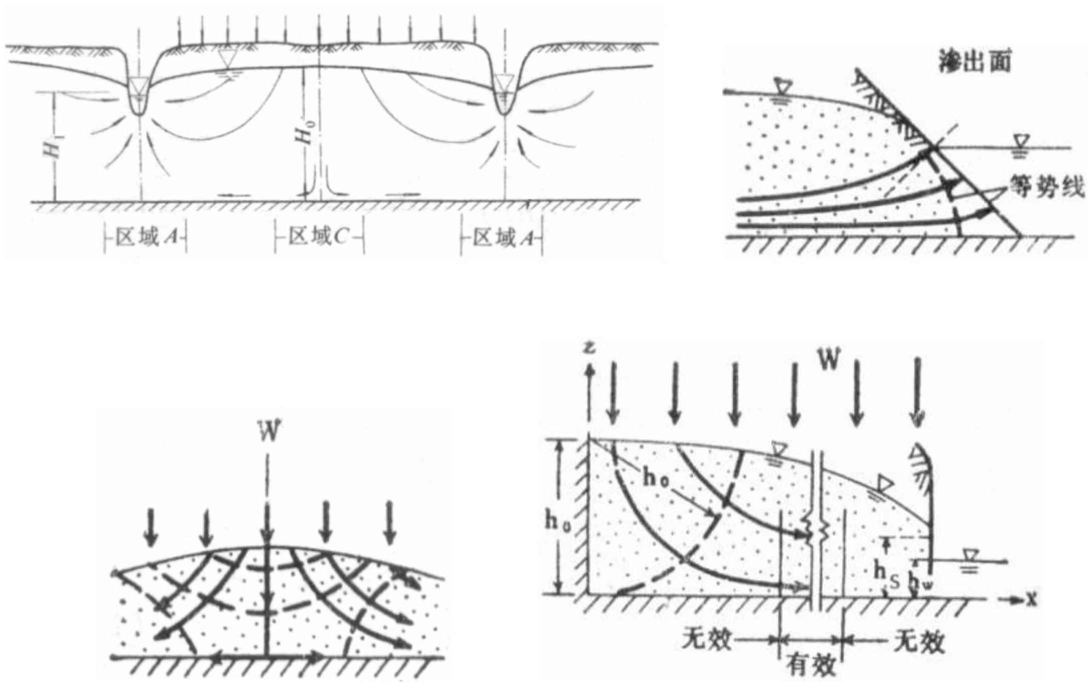


图 1.11 裘布依假设不适用区域

（二） 布西尼斯克（Boussinesq）方程

布西尼斯克方程是研究潜水运动的基本微分方程，它的推导基于如下假定：①潜水流满足裘布依假定；②含水层骨架和水不可压缩，即假定 $\rho = c$、$\mu_e = 0$；③潜水层隔水底板水平；④潜水面上存在垂向交换水量 ε（ε 定义为单位时间、单位水平面积上含水层与外界垂向交换的水量，入渗补给或人工补给为正值，蒸发排泄为负值）。

在潜水含水层中取一柱状单元体，单元体底边分别为 Δx、Δy，高为含水层厚度 $h(x, y, t)$（由假设条件③，含水层厚度 h 等于水头值 H）。据上述假设，单元体的水量平衡方程为

$$\left\{\left[q_x\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y\right)-q_x\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y\right)\right]\Delta y+\left[q_y\left(x, y-\frac{\Delta y}{2}\right)-q_y\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}\right)\right]\Delta x\right\}\Delta t$$
$$+\varepsilon \Delta x \Delta y \Delta t=\mu\left[H(t+\Delta t)-H(t)\right]\Delta x \Delta y$$

(1.4.24)

式中：q_x、q_y 分别为沿坐标 x、y 方向的单宽流量；μ 为潜水的给水度（水位下降时）或饱和差（水位上升时）。

引用方程(1.4.23)（y 方向也类似），可得非均质各向同性含水层潜水运动方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Kh\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(Kh\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\varepsilon=\mu\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1.4.25}$$

对于均质各向同性含水层，K=常数，式(1.4.25)变为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\varepsilon}{K}=\frac{\mu}{K}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1.4.26}$$

上述两式即为具有水平隔水底板的潜水地下水运动基本微分方程，称为布西尼斯克方程。方程中的含水层厚度 h 也是一个变化的量，因此方程为二阶非线性偏微分方程，求解比较困难，常需进行线性化处理后求解。

应注意的是，上述方程的推导是基于裘布依假设，并忽略了弹性储存，所取的单元体是包括整个含水层厚度在内的土柱，因此，方程所求得的解 $H(x, y, t)$只是整个含水层厚度上的平均水头，无法得出垂直剖面上不同深度处的水头分布。布西尼斯克方程的适用条件与裘布依假设条件相同。

均质各向同性含水层中轴对称径向流的潜水微分方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rh\frac{\partial H}{\partial r}\right)+\frac{\varepsilon}{K}=\frac{\mu}{K}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1.4.27}$$

三、 定解条件和定解问题

地下水运动的基本微分方程只反映了地下水运动中水头函数所遵循的普遍规律，要获得水头函数的具体形式，还需要在时间和空间条件上加以限制以表明所研究的实际问题的特定条件，这就是初始条件和边界条件，二者合称为定解条件。一个或一组数学方程与其定解条件共同构成一个描述某实际问题的数学模型。一个物理现象或过程可被一个数学问题合理地描述，应满足三个基本要求：①解必须存在（解的存在性）；②解必须是唯一确定的（解的唯一性）；③解必须连续依赖于求解它的参数和初始与边界条件（解的稳定性）。满足这三个基本要求的数学模型称为定解问题或适定问题，可通过各种室内外实验数据和结果来检验问题的适定性和求解的正确性。

对于稳定流问题，水头分布与时间无关，定解条件中只需要边界条件。这种仅决定于所研究区域边界条件的地下水运动问题称为边值问题。对于非稳定流，则初始条件与边界条件缺一不可。具有初始条件的地下水运动问题称为初值问题。

（一） 初始条件

在渗流问题中，方程的因变量多为地下水水头。因此，通常把初始时刻（$t = 0$ 或 $t = t_0$ 时刻）渗流区内水头的分布状况称为初始条件。

对于三维流问题，测压水头的初始条件为

$$h\big|_{t=0} = h(x, y, z, 0) \tag{1.4.28}$$

对于平面二维流问题，测压水头的初始条件为

$$h\big|_{t=0} = h(x, y, 0) \tag{1.4.29}$$

（二） 边界条件

边界条件用于描述水头 H（或渗流量 q）在渗流区边界上所能满足的条件，表示所研究区域内部水流与外界系统之间的相互关系及作用。

一维水流的边界一般是某条线段（l）的两个端点；二维水流的边界是平面渗流区域（D）全部边界线（直线或曲线）和某些孤立的边界点与边界线；三维水流的边界是渗流空间区域（U）的全部边界面（平面或曲面）和某些孤立的边界点与边界线。

常见的边界条件有以下三种类型：

1.第一类边界条件（Dirichlet 条件）

水头（或测压水头）分布（或方程形式）为已知的边界称为第一类边界，又称给定水头边界，用以下形式表示：

$$h\big|_{S_1} = h_1(x, y, z, t) \qquad (x, y, z) \in S_1 \tag{1.4.30}$$

或

$$h\big|_{\varGamma_1} = h_2(x, y, t) \qquad (x, y) \in \varGamma_1 \tag{1.4.31}$$

式中：h_1、h_2 分别表示在三维和二维条件下边界段 S_1 和$\varGamma_1$ 上的已知水头函数。

若曲面 S_1 和曲线$\varGamma_1$ 上点的测压水头相等且等于某个常数，此时边界为一等势面或等势线。给定测压水头边界的地下水运动问题称为第一类边界问题或 Dirichlet 问题。可以作为第一类边界条件来处理的情况很多，如：以地下水面为上边界的地下水流动区域，若地下水面（或测压水头）的变化已知或预先给定，即为给定测压水头边界；当含水层被河流或湖泊切割，且地下水与地表水有水力联系时，二者交界面（或线）可作为第一类边界，边界上的测压水位就是河湖的水位。

注意，给定水头边界是指边界水头的变化形式已知，但不一定是定水头，后者的水头是不随时间变化的常数。

2.第二类边界条件（Neumann 条件）

垂直于边界曲面 S_2 或曲线$\varGamma_2$ 上的流动通量为已知的边界称为第二类边界，又称给定通量边界。这类边界条件可表示为

$$-K\frac{\partial h}{\partial n}\bigg|_{S_2} = q_1(x, y, z, t) \qquad (x, y, z) \in S_2 \tag{1.4.32}$$

或

$$-K\frac{\partial h}{\partial n}\bigg|_{\varGamma_2} = q_2(x, y, t) \qquad (x, y) \in \varGamma_2 \tag{1.4.33}$$

式中：n 为 S_2 或$\varGamma_2$ 的外法线方向；q_1、q_2 均为已知函数，分别表示 S_2 上单位面积和$\varGamma_2$ 上单位宽度

的侧向补给量。

对于给定通量边界问题，在数学上称为第二类边值问题，或 Neumann 问题。

3.第三类边界条件（Cauchy 条件）

若边界曲面 S_3 或曲线 Γ_3 上水头梯度 $\frac{\partial h}{\partial n}$ 和水头函数 h 的线性组合为已知，这类边界称为第三类边界条件或混合边界条件，表达形式为

$$\frac{\partial h}{\partial n}+f_1H=f_2 \tag{1.4.34}$$

式中：f_1、f_2 均为边界上的已知函数。

具有此类边界条件的地下水运动问题称为 Cauchy 问题。图 1.12 是该条件的一种情况：承压含水层的侧向边界由两层构成，一是垂向分布的薄弱透水层，二是弱层边界外侧的地表水体（河流或湖泊），承压含水层中的地下水通过弱透水层向河流排泄，此时边界面上的水流通量 q 为

$$q_1(x,y,z,t)=-K\left.\frac{\partial h}{\partial n}\right|_{S_3}=\frac{K'}{m'}(h-h_0) \tag{1.4.35}$$

式中：K' 和 m' 分别为弱透水边界的渗透系数和厚度；h_0 为边界外侧河流的水位。

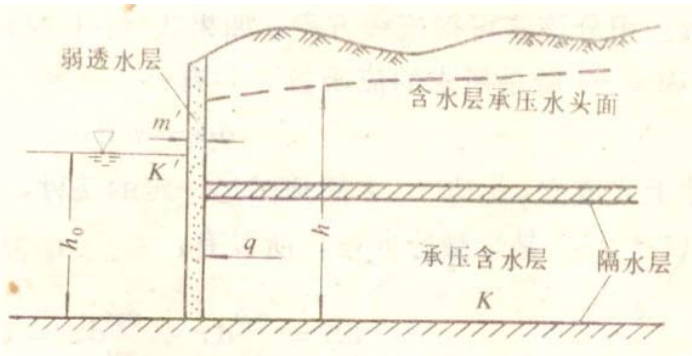


图 1.12　第三类边界条件

第二章　河渠（沟）影响下的地下水运动

一般情况下，河渠与地下水之间有着一定的水力联系，河渠水位和流量的变化会影响附近地区的地下水动态。当河渠水位高于附近地下水位时，河渠将补给地下水；反之，河渠就成为地下水的排泄出路。研究河渠附近地下水的运动规律，对地下水资源评价、人工回灌系统规划设计、河道建闸蓄水对两岸地下水动态的影响计算、浅层地下水为咸水地区的排咸补淡工程规划设计、

土壤盐碱化的预防和改良等都有重要意义。

第一节　河渠渗漏过程

河渠在输水过程中将发生渗漏。季节性河道和中小型渠道的输水过程是间歇性的，河渠开始充水后，渗漏过程通常经历三个阶段：非稳定非饱和渗流（湿润河床（或渠床）以下土层）阶段、稳定自由渗流阶段和顶托渗流阶段。

1. 非稳定非饱和渗流阶段

河渠在行水初期，渗漏水首先湿润渠床以下及周围的土层，随着湿润土层逐渐加深，渠道渗漏量随之变小，渗漏水体的湿润锋面向下层推移的速度也逐渐减小，因此，渗漏过程呈非稳定状态。湿润锋面以上土体逐渐被饱和，而湿润锋面附近的水分运动则呈非饱和运动状态。这个阶段延续的时间长短取决于地下水埋深的大小及渠底以下土层的透水性。

2. 稳定自由渗流阶段

随着渗漏水锋面不断下移而到达地下水面后，下渗水体与地下水形成水力联系，便进入了河渠自由渗流阶段。此时，由于接受渗漏水的补给，河渠以下的地下水位逐渐升高，形成水丘状，并向两侧扩展（图 2.1）。渗漏初期，由于地下水出流坡度较小，渠道的渗流量大于地下水向两侧扩散的出流量，导致地下水位不断上升；在地下水位未上升至河（渠）底之前，河渠的渗流受地下水位的影响较小，当水丘向两侧扩散的流量与来自渠底的渗漏量相等时，渠道渗漏过程为稳定状态，渗漏量基本保持稳定，故称为稳定自由渗流。

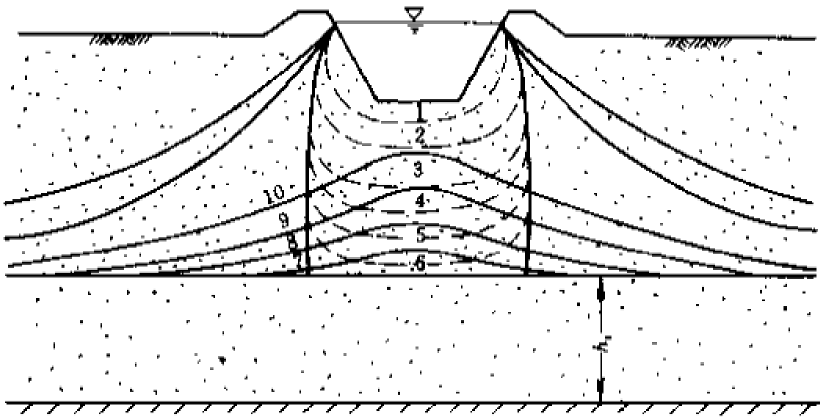


图 2.1　非稳定与稳定自由渗流过程

3. 顶托渗流阶段

在渠道渗漏量较大，地下水埋深较小，或地下水出流不畅的条件下，河渠自由渗流阶段持续时间是比较短的。随着水丘的峰值越来越高，上升至河（渠）底以后，地下水与渠道中的地面水连成一体，河渠的渗漏将受到地下水的顶托影响（图 2.2），称为顶托渗流阶段。在这一阶段，随着渗漏水体影响区域的扩展，水力坡降逐渐减小，河渠渗漏流量也随之减少。如果渠道附近有稳定的排泄区，经过一定时间渗漏后，顶托渗漏也可能达到稳定状态。一般来说，顶托阶段的渗漏量比前两个渗漏阶段要小。

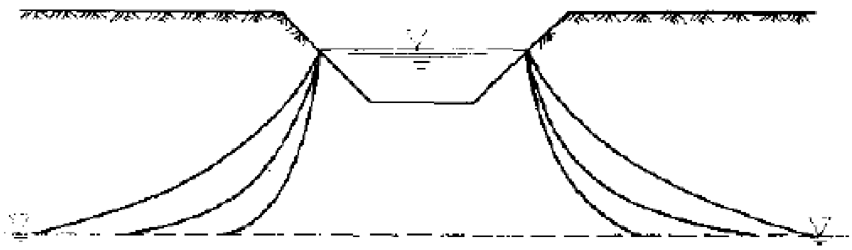


图 2.2　顶托渗流

第二节　河渠发生自由渗漏时附近地下水的运动

一、 河渠自由渗漏量的计算

在无边界限制的含水层中，有一条河渠输水并发生自由渗流。这种情况下，河渠的渗漏量主要决定于河渠的断面形式、河渠水位、渠床和下部土层的渗透系数等因素。河渠渗漏的计算方法很多，现列举两类加以说明。

（一） 理论公式

常见的形式为(В. В. Ведерников, 1939)

$$q=K(B+Ah) \tag{2.2.1}$$

式中: q 为河渠单位长度的渗漏量；K 为河（渠）床的渗透系数；B 为河（渠）水面宽，$B = b+2mh$ (b 为渠底宽，m 为边坡系数)；A 是根据渗流理论推导出的系数，与边坡系数 m 和宽深比 B/h 有关，可自图 2.3 查得。对于宽深比较小的渠道，为便于计算，可近似采用 A=2，当宽深比较大时，A 值可达 3～4。

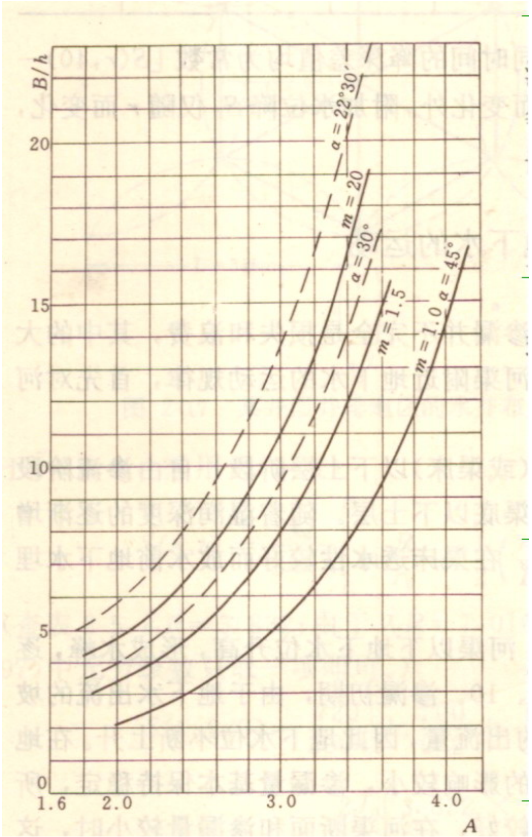


图 2.3 *A* 值曲线

（二） 经验公式

由于渠道渗漏的影响因素很多，直接测定又有一定困难，在灌溉设计中常用经验公式近似估算。计算渠道渗漏损失的常用公式为(武汉水利电力学院，1978)

$$\sigma = \frac{a}{Q^m} \tag{2.2.2}$$

式中: σ 为每公里长渠道的渗漏损失占通过流量的百分数；a、b 分别为反映土壤透水性的系数，如表 2.1 所示；Q 是渠道输水流量，m^3/s。

表 2.1 系数 a、m 值

渠床土壤类型	透水性	a	m
重黏土及黏土	弱	0.7	0.3
中黏壤土	中等	1.9	0.4
砂壤土及轻壤土	强	3.4	0.5

则有

$$q = 0.864aQ^{1-m} \tag{2.2.3}$$

式中: q 为每米渠长的渗漏损失流量[$m^3/(d\cdot m)$]。

二、 河渠附近地下水的上升值

设地下水初始水位 h_0 为水平，受河渠的影响任一时间的地下水位为 h，如取水位上升值 $s=h-h_0$ 为变量，建立如图 2.4 所示的坐标系，则地下水运动的基本方程及初始和边界条件为

$$a\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{\partial s}{\partial t} \tag{2.2.4}$$

$$s(x,0)=0 \tag{2.2.5}$$

$$s(\infty,t)=0 \tag{2.2.6}$$

$$-K\bar{h}\frac{\partial s}{\partial x}\bigg|_{x\to 0}=\frac{q}{2} \tag{2.2.7}$$

式(2.2.7)是基于河渠渗漏量保持一定的情况，向一侧排泄的渗漏量为 $q/2$，根据达西定律而得。

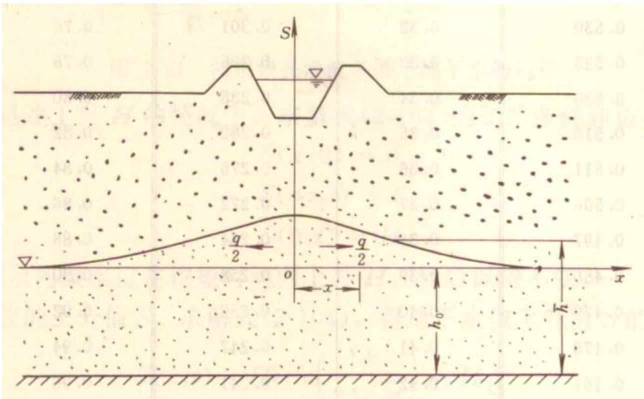


图 2.4　　河渠自由渗流影响下地下水的运动

求解上述定解问题，可得到水位上升值 s 的计算式为

$$s(x,t)=\frac{qx}{2K\bar{h}}\left[\frac{1}{z}\mathrm{ierfc}(z)\right]=\frac{qx}{2K\bar{h}}G(z) \tag{2.2.8}$$

式中: $z=\frac{x}{2\sqrt{at}}$，$a=\frac{K\bar{h}}{\mu}$；$\mathrm{ierfc}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty\int_z^\infty \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}z$；$\frac{q}{2K\bar{h}}$ 为稳定流时的地下水面坡降；$\frac{qx}{2K\bar{h}}$ 为稳定流情况下距河渠 x 处的水位变化值；$\bar{h}$ 为含水层平均厚度。$G(z)$值可查阅相关函数表（张蔚榛，1983）。

第三节　河渠顶托渗流条件下地下水的运动

一、 河渠水位迅速上升时地下水的运动

设在河渠水位变化前地下水初始水位水平，为 h_0。取水位变化值 $s=h-h_0$ 为变量，建立如图

2.5 所示的坐标系。s 值自初始水位算起，上升时取正号，下降时取负号。当河渠水位迅速上升高度 H 的情况下，地下水运动的基本方程及初始和边界条件为

$$a\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{\partial s}{\partial t} \tag{2.2.4}$$

$$s(x,0)=0 \tag{2.2.5}$$

$$s(\infty,t)=0 \tag{2.2.6}$$

$$s(0,t)=H \tag{2.3.1}$$

式(2.3.1)表示河渠水位在 t=0 的很短时间内上升 H，然后保持不变。

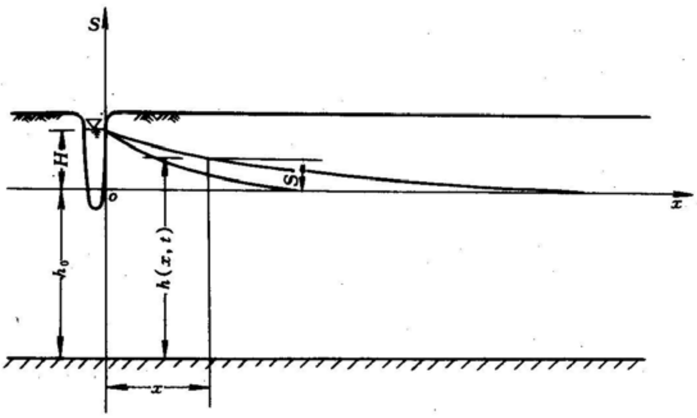


图 2.5　　河渠顶托渗流影响下地下水的运动

（一）　地下水位上升值 s

求解上述定解问题，可得到在河渠水位突升后的 t 时刻，距河渠 x 处的地下水位上升值 s 的表达式

$$s=H\,\mathrm{erfc}(z)=H\widehat{S} \tag{2.3.2}$$

其中，$z=\dfrac{x}{2\sqrt{at}}$，

$$\widehat{S}=\mathrm{erfc}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \tag{2.3.3}$$

erfc(z)=1−erf(z)，$\mathrm{erf}(z)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$。称 erf($z$)为误差函数，erfc($z$)为余误差函数，可自表 2.3 查得。若含水层的压力传导系数 a 已知，欲求在任一距离 x 和任一时间 t 因河渠水位突变 H 而引起的地下水位的变化值，可先求出 z，然后查阅余误差函数表（张蔚榛，1983）得到 $\widehat{S}(z)$，由式(2.3.2)即可确定 s 值。

（二） 地下水流速和流量

经变换求解（张蔚榛，1983），可得到在河渠水位突然上升后，附近地下水的渗透速度 v

$$v=-K\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{HK}{\sqrt{\pi at}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4at}}=K\frac{H}{x}\widehat{P} \tag{2.3.4}$$

式中：$\widehat{P}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}z\cdot e^{-z^2}$ 的值可自数学手册查得；$K\frac{H}{x}$ 为表示当河渠位置至断面 x 之间区域的平均坡降为 $\frac{H}{x}$ 时的地下水流速。

地下水的实际流速 u 用下式表示

$$u=\frac{v}{n}=\frac{HK}{n\sqrt{\pi at}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4at}} \tag{2.3.5}$$

由(2.3.4)式，通过任一断面 x 处的流量 q_x 为

$$q_x=v\bar{h}=\frac{HK\bar{h}}{\sqrt{\pi at}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4at}}=\frac{H\mu\sqrt{a}}{\sqrt{\pi t}}e^{-z^2} \tag{2.3.6}$$

当 $x=0$ 时，可得河渠向一侧补给地下水的单宽流量 q_0

$$q_0=\frac{H\mu\sqrt{a}}{\sqrt{\pi t}} \tag{2.3.7}$$

在时间 t 内，通过任一断面 x 处的单宽地下水总量 U_x

$$U_x=\int_0^t q_x\,\mathrm{d}t=2\sqrt{at}\mu H\,\mathrm{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \tag{2.3.8}$$

式(2.3.8)也可表示为如下形式：

$$U_x=\mu Hx\frac{2\sqrt{at}}{x}\mathrm{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)=\mu Hx\frac{1}{z}\mathrm{ierfc}(z)=\mu HxG \tag{2.3.8′}$$

式中，$z=\frac{x}{2\sqrt{at}}$，$G=\frac{1}{z}\mathrm{ierfc}(z)$。

在(2.3.8)式中，取 $x=0$，可以得到在 t 时段内，河渠向一侧补给地下水的总量 U_0

$$U_0=\int_0^t q_0\,\mathrm{d}t=2H\mu\sqrt{at}\,\mathrm{ierfc}(0)=1.128H\mu\sqrt{at} \tag{2.3.9}$$

（三） 河渠水位呈阶梯状变化的情况

在实际情况下，河渠水位常是变化的。如果河渠水位随时间的变化呈阶梯形状（或概化为阶梯形状），如图 2.6 所示，当 $t>t_m$ 时，河渠边界条件（相比式(2.3.1)）成为

$$s(0,t)=\sum_{0}^{m}\left(H_m-H_{m-1}\right) \tag{2.3.10}$$

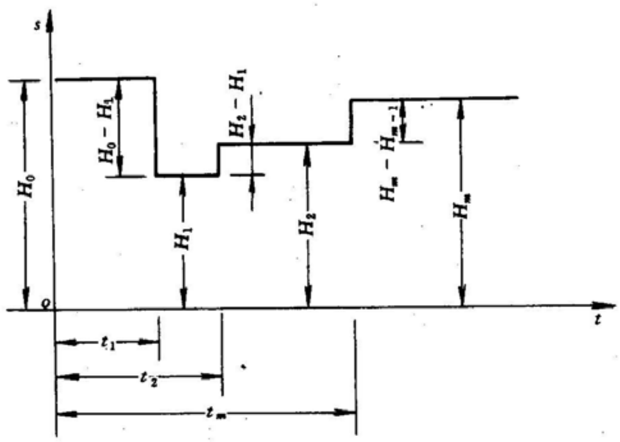


图 2.6　　河渠水位呈阶梯状变化过程

利用式(2.3.10)作为边界条件，求解方程(2.2.4)，得到当 $t>t_m$ 时，河渠附近地下水位的上升值

$$s(x,t)=\sum_{0}^{m}\left(H_m-H_{m-1}\right)\widehat{S}_{x,t-t_m} \tag{2.3.11}$$

通过任一断面 x 处的地下水流量（$t>t_m$）

$$q_x=\sum_{0}^{m}\frac{\left(H_m-H_{m-1}\right)\mu\sqrt{a}}{\sqrt{\pi\left(t-t_m\right)}}e^{-\frac{x^2}{4a\left(t-t_m\right)}} \tag{2.3.12}$$

河渠向一侧补给地下水的流量（$t>t_m$）

$$q_0=\sum_{0}^{m}\frac{\left(H_m-H_{m-1}\right)\mu\sqrt{a}}{\sqrt{\pi\left(t-t_m\right)}} \tag{2.3.13}$$

通过断面 x 处的地下水总量

$$U_x=\mu x\sum_{0}^{m}\left(H_m-H_{m-1}\right)G_m \tag{2.3.14}$$

$$G_m=\frac{1}{z_m}\operatorname{ierfc}\left(z_m\right),\quad z_m=\frac{x}{2\sqrt{a\left(t-t_m\right)}}$$

河渠向一侧补给地下水的总量

$$U_0=1.128\mu\sqrt{a}\sum_{0}^{m}\left(H_m-H_{m-1}\right)\sqrt{t-t_m} \tag{2.3.15}$$

二、 河渠水位等速上升（或成折线变化）时地下水的运动

（一） 河渠水位等速上升时的情况

在河渠水位等速上升（或下降）的情况下，河渠附近地下水非稳定流定解问题为

$$a\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{\partial s}{\partial t} \tag{2.2.4}$$

$$s(x,0)=0 \tag{2.2.5}$$

$$s(\infty,t)=0 \tag{2.2.6}$$

$$s(0,t)=v_0 t \tag{2.3.16}$$

求解该定解问题，得到地下水位上升值的计算式为

$$s(x,t)=v_0 t\left[4\,\mathrm{i}^2\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right]=v_0 t\cdot M(z) \tag{2.3.17}$$

式中：$M(z)$为河渠水位等速升降（折线变化）时对地下水位的影响系数。

$$z=\frac{x}{2\sqrt{at}}，\quad \mathrm{i}^2\mathrm{erfc}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty\int_z^\infty\int_z^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}z$$

$M(z)$为一特殊函数，可查相关的特殊函数表（张蔚榛，1983）。

通过任一断面 x 处的地下水流量

$$q_x=v_0 x\mu\cdot\frac{1}{z}\mathrm{ierfc}(z)=v_0 x\mu\cdot G \tag{2.3.18}$$

河渠向一侧补给地下水的流量

$$q_0=1.128 v_0\mu\cdot\sqrt{at} \tag{2.3.19}$$

在时间 t 内，通过任一断面 x 处的单宽地下水总量 U_x 为

$$U_x=\int_0^t q_x\,\mathrm{d}t=8v_0\mu\,t\sqrt{at}\,\mathrm{i}^3\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \tag{2.3.20}$$

在 t 时段内，河渠向一侧补给地下水的总量 U_0 为

$$U_0=0.75 v_0 t\mu\sqrt{at} \tag{2.3.21}$$

（二） 河渠水位呈折线（分段等速）变化的情况

在实际情况下，河渠水位会随着径流汇集情况和输水过程而涨落，涨落的速度在各时段可能是不同的。这种不等速涨落过程可概化为图 2.7 所示的折线变化情况。

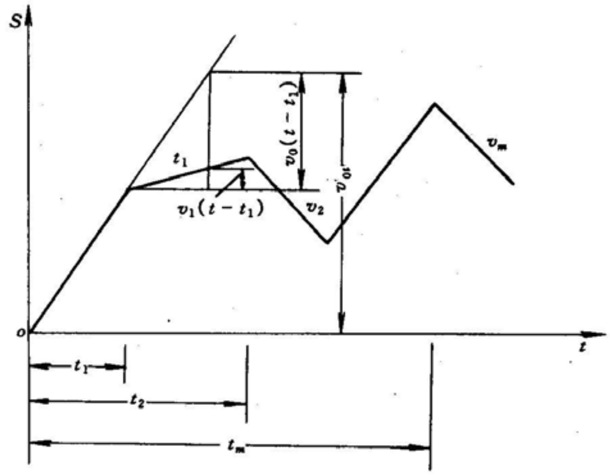


图 2.7　河渠水位呈折线变化过程的概化图

分析图 2.7，可以得出：

当 $t<t_1$ 时，从开始时的水位算起，河渠水位的变化为 $s(0,t)=v_0 t$；

当 $t_2>t>t_1$ 时，河渠水位的变化为 $s(0,t)=v_0 t+(v_1-v_0)(t-t_1)$；

当 $t>t_2$ 时，河渠水位的变化为 $s(0,t)=\sum_0^m (v_m-v_{m-1})(t-t_m)$。

根据水流叠加的原理，可得出河渠附近地下水位变化值为

$$s(x,t)=\sum_0^m (v_m-v_{m-1})(t-t_m)M_m \tag{2.3.22}$$

式中：$M_m=4\,\mathrm{i}^2\mathrm{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{a(t-t_m)}}\right)$

通过任一断面 x 处的地下水流量为

$$q_x=\mu\,x\sum_0^m (v_m-v_{m-1})\,G_m \tag{2.3.23}$$

式中：$G_m=\dfrac{2\sqrt{a(t-t_m)}}{x}\mathrm{ierfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{a(t-t_m)}}\right)$

河渠向一侧补给地下水的流量为

$$q_0=1.128\mu\cdot\sum_0^m (v_m-v_{m-1})\sqrt{a(t-t_m)} \tag{2.3.24}$$

在时间 t 内，通过任一断面 x 处的单宽地下水总量 U_x 为

$$U_x=\mu\,x\sum_0^m (v_m-v_{m-1})(t-t_m)D_m \tag{2.3.25}$$

式中：$D_m=\dfrac{4}{z_m}\mathrm{i}^3\mathrm{erfc}(z_m)$，　　$z_m=\dfrac{x}{2\sqrt{a(t-t_m)}}$ 。$D(z)$可查阅相关函数表（张蔚榛，1983）。

在 t 时段内，河渠向一侧补给地下水的总量 U_0 为

$$U_0=0.75\mu\sqrt{a}\sum_0^m(v_m-v_{m-1})\sqrt{(t-t_m)^3} \tag{2.3.26}$$

第四节 水平排水条件下的地下水运动

在农田水利领域，常遇到水田、旱作地区的地下排水和稻田、河流与平原水库的截渗排水计算问题。为了排除田间积水和降低地下水位，需要布置一系列相互平行（或接近平行）的沟渠（或利用天然河道）将地区分割成条带状地段，在河渠较深、具有阻截地下水的作用时，河间地段地下水动态可以作为独立单元进行研究。

在水平排水条件下，特别是在暗管排水和非完整沟排水条件下，地下水流多为非稳定非渐变流，即地下水流为垂直剖面上的二维非稳定流。这类问题除个别简单边界情况可以求得严格解析解外，一般均需通过一定简化后才能求得近似解。近似求解的方法主要有两种：一是将非渐变流近似地看作渐变流，先求得非稳定渐变流的解，再根据非渐变流对得到的解析解进行修正；二是先将各个瞬间的非稳定水流近似看作稳定水流，在求得稳定非渐变流解后，再根据各个瞬间水位和流量的变化过程，近似推求非稳定非渐变流的解。以下分两类给出相应的解。

一、 水平排水地段地下水非稳定渐变渗流

当排水沟（河）为完整沟时，两沟（河）间地段的地下水流可视为渐变流。

（一） 均匀入渗条件下沟（河）间地段地下水非稳定渐变渗流

在有降雨或灌水入渗的情况下，地下水位将随入渗补给而上升，当入渗停止后，在排水沟的作用下地下水位逐渐下降，地下水运动为非稳定状态。地下水位的上升高度除了与降雨和灌水入渗强度及持续时间有关外，还决定于土层的厚度和排水沟的间距等。

图 2.8 表示地表均匀入渗补给（补给强度为ε）条件下，两侧为完整排水沟（河）的沟（河）间地段的排水情况，此时，地下水流可视为渐变流，对于均质含水层，地下水运动的基本方程为

$$a\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\varepsilon}{\mu}=\frac{\partial s}{\partial t} \tag{2.4.1}$$

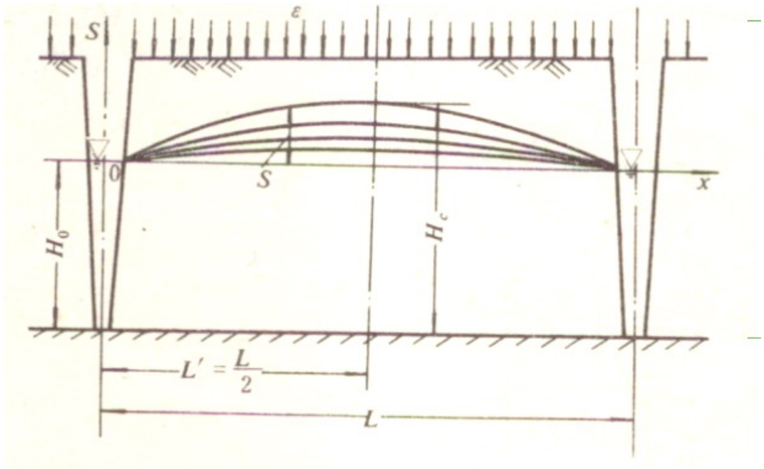


图 2.8 均匀入渗沟间地块排水示意图

图 2.8 中，两侧沟（河）水位保持稳定，且河间地段补给强度均匀分布，则沟（河）间地段地下水的运动情况应以该地段中心为对称。在这种情况下，地段中心可看作不透水边界。取地段的一半，其一侧边界为河渠、一侧为不透水边界，则相应于式(2.4.1)的定解条件为

$$s(x,0)=0 \tag{2.4.2}$$

$$s(0,t)=0 \tag{2.4.3}$$

$$s(L,t)=0 \tag{2.4.4}$$

或

$$\frac{\partial s(L',t)}{\partial x}=0 \tag{2.4.5}$$

式中：s 为地下水位上升值；L 为两沟（河）之间的距离；$L'=L/2$ 。

令

$$\bar{x}=\frac{x}{L'},\quad \bar{t}=\frac{4at}{L^2}=\frac{at}{L'^2}$$

求解上述定解问题，可得出河间地段任一点 x 处地下水位上升值 s 的计算公式

$$s(x,t)=\frac{\varepsilon\, t}{\mu}\eta(\bar{x},\bar{t}) \tag{2.4.6}$$

$$\eta(\bar{x},\bar{t})=\frac{\bar{x}(2-\bar{x})}{2\bar{t}}+\frac{2}{\bar{t}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\left[\frac{2n-1}{2}\pi(1-\bar{x})\right]}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^3}\mathrm{e}^{-\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2\bar{t}} \tag{2.4.6'}$$

当 $\bar{t}>2$ 时，式(2.4.6′)中右端第二项可忽略不计，此时，式(2.4.6)可简化为

$$s(x,t)=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{K\bar{h}}x(2L'-x) \tag{2.4.7}$$

可以看出，水位上升值 s 与时间 t 无关，即水位达到了稳定。

在河（沟）间地段中心，$x=L'$ ，水位上升值为

$$s_c=s(L',t)=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{K\bar{h}}L'^2=\frac{1}{8}\frac{\varepsilon}{K\bar{h}}L^2 \tag{2.4.7'}$$

根据 $q_0=-K\bar{h}\left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_{x=0}$ ，可导出河渠排泄地下水的流量 q_0 的计算式为

$$q_0=\varepsilon L'(G)'_0 \tag{2.4.8}$$

$$(G)'_0=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\left[\frac{2n-1}{2}\pi\right]}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^3}\mathrm{e}^{-\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2\bar{t}} \tag{2.4.8′}$$

当 $\bar{t}>2$ 时，$(G)'_0=1,\quad q_0=\varepsilon L'$ 。

自式(2.4.7′)可得出排水流量与地段中心水位上升值的关系式：

$$q_0=\varepsilon L'=2K\bar{h}\frac{s_c}{L'}=2K\frac{H_0+H_c}{2}\frac{H_c-H_0}{L'}=K\frac{H_c^2-H_0^2}{L'} \tag{2.4.7″}$$

式中：H_0、H_c 分别为 $x=0$ 和 $x=L'$ 处的水位高度。

利用式(2.4.7′)，还可以计算排水沟间距。若入渗强度为ε，两沟中间允许地下水上升高度为 s_c，则排水沟间距 L 的计算式为

$$L=\sqrt{\frac{8K\bar{h}s_c}{\varepsilon}}=\sqrt{\frac{8s_cK\left(\frac{2H_0+s_c}{2}\right)}{\varepsilon}}=\sqrt{\frac{4K\left(s_c^2+2H_0s_c\right)}{\varepsilon}} \tag{2.4.9}$$

式中：$\bar{h}=\frac{H_0+H_c}{2}=\frac{2H_0+s_c}{2}$ 。式(2.4.9)即为长期降雨入渗（$\bar{t}>2$）条件下排水地段发生稳定渗流时排水沟间距的计算公式。注意，稳定时间需满足

$$t\geq 2L'^2\frac{\mu}{K\bar{h}} \tag{2.4.10}$$

式(2.4.10)表明，除了降雨入渗持续时间外，是否发生稳定渗流还决定于 K、$\bar{h}$、μ、L 等因素。排水沟间距 L 愈小，土壤渗透系数 K 愈大，土层厚度 $\bar{h}$ 愈大，达到稳定所需的时间愈短。

如果降雨入渗强度ε 随时间发生变化，并可简化为阶梯形变化，或发生间歇降雨或灌水时（见图 2. 6），任一时刻的入渗强度可表示为

$$\varepsilon=\sum_{0}^{m}\left(\varepsilon_m-\varepsilon_{m-1}\right)$$

式中：ε_m 为 $t>t_m$ 时的入渗强度，m=0 时，ε_{m-1}＝0。

在任一时间 $t>t_m$ 时，地下水位的计算式为

$$s(x,t)=\sum_{0}^{m}\frac{\varepsilon_m-\varepsilon_{m-1}}{\mu}\left(t-t_m\right)\left[1-\left(M_m\right)'\right] \tag{2.4.11}$$

式中，
$$\left(M_m\right)'=4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[i^2\,\mathrm{erfc}\left(\frac{2n+2-\bar{x}}{2\sqrt{\bar{t}-\bar{t}_m}}\right)+i^2\,\mathrm{erfc}\left(\frac{2n+\bar{x}}{2\sqrt{\bar{t}-\bar{t}_m}}\right)\right]$$

或 $$\left(M_m\right)'=1+\frac{\bar{x}(\bar{x}-2)}{2(\bar{t}-\bar{t}_m)}-\frac{2}{\bar{t}-\bar{t}_m}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)(1-\bar{x})}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^3}\mathrm{e}^{-\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2(\bar{t}-\bar{t}_m)}$$

同样，可得出河渠排水流量的计算式：

$$q_0=\sum_0^m(\varepsilon_m-\varepsilon_{m-1})L'(G_m)'_0 \tag{2.4.12}$$

式中 $$(G_m)'_0=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 2\sqrt{\bar{t}-\bar{t}_m}\left[i\,\mathrm{erfc}\left(\frac{n}{\sqrt{\bar{t}-\bar{t}_m}}\right)-i\,\mathrm{erfc}\left(\frac{n+1}{\sqrt{\bar{t}-\bar{t}_m}}\right)\right]$$

或 $$(G_m)'_0=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}\mathrm{e}^{-\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2(\bar{t}-\bar{t}_m)}$$

对于沟距 L 很大，且 a 值很小的情况，则 ${L'^2}/{a}$ 很大。当满足 $t<0.04\dfrac{L'^2}{a}$ 时，式(2.4.6)可简化为

$$s(x,t)=\frac{\varepsilon t}{\mu}\left[1-M(Z)\right] \tag{2.4.6''}$$

式中：$M(Z)=4i^2\,\mathrm{erfc}(Z)$； $Z=\dfrac{x}{2at}$。式(2.46″)为仅有单沟排水时地下水位的计算公式。

此时，沟的排水流量为

$$q_0=1.128\varepsilon\sqrt{at} \tag{2.4.13}$$

在无排水情况下，降雨入渗过程中地下水位上升高度为 ${\varepsilon t}/{\mu}$。

（二） 排水沟水位瞬时下降条件下沟间地段的渗流

（1）初始水位水平的情况

在降雨入渗强度很大，而入渗持续过程又较短的情况下，除了在沟附近地段由于排水沟的控制作用导致地下水上升高度小于 ${\varepsilon t}/{\mu}$ 以外，大部分地区地下水位变化均与无排水的情况相同。此时，降雨入渗过程可以近似按瞬时补给一定水量 W 的情况考虑。W 的补给将引起沟间地段的地下水位普遍上升 $h_0={W}/{\mu}$ （μ 为自由孔隙率或称饱和差）。

上述问题也可以看成初始时（入渗停止时）地下水位水平，位于沟水位以上 h_0（图 2.9），或在 $t=0$ 时刻沟水位突降 h_0，然后保持不变。

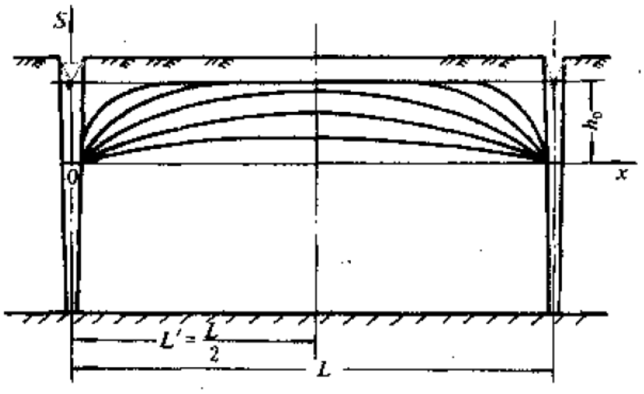


图 2.9　　沟水位突降条件下地下水渗流

该条件下地下水运动基本方程、初始条件和边界条件为

$$a\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{\partial s}{\partial t} \tag{2.2.4}$$

$$s(x,0)=h_0 \tag{2.2.5'}$$

$$s(0,t)=0 \tag{2.2.6}$$

$$\frac{\partial s(L',t)}{\partial x}=0 \tag{2.4.5}$$

经适当变换后对上述问题求解，可得到两种形式的解。

（1）误差函数形式的解

$$s(\bar{x},\bar{t})=h_0\left[1-(s)'\right] \tag{2.4.14}$$

式中：　$(s)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{2n+2-\bar{x}}{2\sqrt{\bar{t}}}\right)+\operatorname{erfc}\left(\frac{2n+\bar{x}}{2\sqrt{\bar{t}}}\right)\right]$，$\bar{x}=\frac{x}{L'}$，　$\bar{t}=\frac{at}{L'^2}$　。

（2）富氏级数形式的解

$$s(\bar{x},\bar{t})=h_0\left[1-(s)'\right] \tag{2.4.15}$$

式中：　$$(s)'=\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\left[(1-\bar{x})\frac{2n-1}{2}\pi\right]}{\frac{2n-1}{2}\pi}e^{-\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2\bar{t}}\right\} \tag{2.4.15'}$$

当 $\bar{t}>0.3$ 时，上式中无穷级数只需取一项即可，有

$$s(\bar{x},\bar{t})=h_0\left[\frac{\cos\left[(1-\bar{x})\frac{\pi}{2}\right]}{\pi}e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\bar{t}}\right] \tag{2.4.16}$$

在两沟间地段中心，有 $\bar{x}=1$，代入式(2.4.16)，得

$$s_c = s(1,\bar{t}) = h_0\left[\frac{4}{\pi}\mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\bar{t}}\right] \tag{2.4.17}$$

取对数后可得出两沟间距 L 的计算公式

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\pi}\sqrt{\frac{\boldsymbol{K\bar{h}t}}{\boldsymbol{\mu}\ln\dfrac{4\boldsymbol{h}_0}{\boldsymbol{\pi}\ \boldsymbol{s}_c}}} \tag{2.4.18}$$

式(2.4.18)一般称为 Glover 公式。

排水沟排水流量的计算：

$$q_0 = K\bar{h}\frac{h_0}{L'}(p)'_0 \tag{2.4.19}$$

$$(p)'_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi\ \bar{t}}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\mathrm{e}^{-\frac{(n+1)^2}{\bar{t}}} - \mathrm{e}^{-\frac{n^2}{\bar{t}}}\right]$$

或

$$(p)'_0 = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{2n-1}{2}\pi\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2\bar{t}}$$

（2）初始水位呈抛物线分布的情况

若降雨停止一段时间（如 $\bar{\boldsymbol{t}} = 0.035$）后，在排水沟的作用下，两沟附近地下水位下降较快，而地块中间处水位下降较慢，地下水面线接近抛物线形状。当初始水面线具抛物线形状时，沟（河）间地段任一点的地下水位 h 可用下式表示：

$$h = h_0\left[1-\left(\frac{2x}{L}\right)^4\right] \tag{2.4.20}$$

两沟中间点地下水位 h_c 为

$$h_c = h_0\times 0.917\frac{4}{\pi}e^{-\left(\frac{K\bar{h}t\pi^2}{\mu L^2}\right)} \tag{2.4.21}$$

排水沟间距 L 的计算式为

$$L = \pi\sqrt{\frac{k\bar{h}t}{\mu\ln\dfrac{1.16h_0}{\pi s_c}}} \tag{2.4.22}$$

(2.4.38)式也称为 Glover-Dumm 公式。

二、 均匀入渗条件下水平排水地段地下水非渐变渗流

在实际情况下，用于农田排水的田间排水沟（或暗管）深度多为 2～2.5m，而透水层厚度常

大于沟深，此时排水沟属于非完整沟，地下水流自含水层进入排水沟时为非渐变渗流，必须考虑排水沟附近局部渗流损失。

（一） 地下水稳定渗流

在均匀入渗条件下，当入渗补给地下水的水量与排水流量相等时地下水运动将达到稳定。前面已导出了稳定时渐变流（完整沟）情况下沟间地段任一点 x 处的水位上升值计算式(2.4.7)及沟间地段中心处地下水位上升值计算式(2.4.7′)。对于非渐变流的求解，可在渐变流的基础上，考虑非完整沟对水流的影响（即在沟床附近发生急剧收缩而产生局部渗流损失），对其进行修正。

（1）不透水层位于有限深度的情况（瞿兴业，1962）

当含水层平均厚度 $\bar{h}$ 相对于排水沟间距 L 来说较小时，如 $L>4\bar{h}$，可视为不透水层位于有限深的情况。非完整排水沟（管）间地段地下水含水层状况及地下水浸润线如图 2.10 所示。排水沟（管）水位（或沟水位高出不透水层的高度）为 H_0，两沟中间一点水位为 H_c。排水暗管的直径为 d（若为排水明沟可采用换算直径或水面宽 B）。假设含水层厚度 $\bar{h}$ 远大于水位变化值$\Delta H=H_c-H_0$，在计算中可近似取为常量$\bar{h}=\dfrac{H_c+H_0}{2}$。

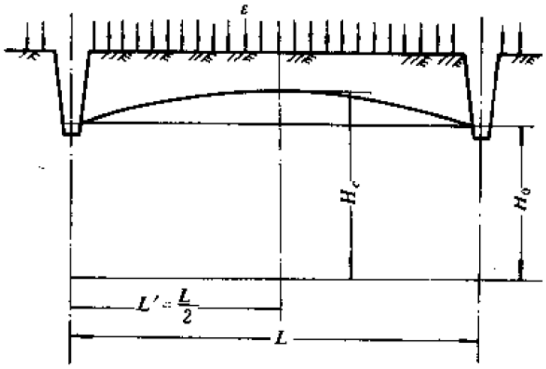


图 2.10　非完整沟排水条件下地下水渗流

通过保角变换求解（瞿兴业，1962），可得出以下结果：

沟间地段任一点地下水位与沟（管）水位之差：

$$H_x-H_0=\frac{2\varepsilon L'}{K}\left[\frac{1}{\pi}\ln\frac{\mathrm{sh}\left(\dfrac{\pi x}{2\bar{h}}\right)}{\mathrm{sh}\left(\dfrac{\pi B}{4\bar{h}}\right)}-\frac{x^2-\dfrac{B^2}{4}}{4\bar{h}L'}\right] \tag{2.4.23}$$

两沟中间点（$x=L'$）处地下水位与沟水位之差：

$$H_c-H_0=\frac{2\varepsilon L'}{K}\left[\frac{1}{\pi}\ln\frac{\mathrm{sh}\left(\dfrac{\pi L'}{2\bar{h}}\right)}{\mathrm{sh}\left(\dfrac{\pi B}{4\bar{h}}\right)}-\frac{L'^2-\dfrac{B^2}{4}}{4\bar{h}L'}\right] \tag{2.4.24}$$

对于不透水层位于有限深度的情况，如果满足$\dfrac{L'}{\bar{h}}>2$，式(2.4.23)可简化为

$$H_c - H_0 = \frac{2\varepsilon L'}{K}\left[\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi B}{4\bar{h}}\right)} + \frac{L'}{4\bar{h}}\right] \tag{2.4.25}$$

或

$$H_c - H_0 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{K\bar{h}}L'^2 + \frac{2\varepsilon L'}{K}\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi B}{4\bar{h}}\right)} \tag{2.4.25′}$$

与式(2.4.7′)相比，可以看出，式(2.4.25′)右端第一项表示在渐变流和完整沟情况下的水位上升值，第二项表示由于排水沟的非完整性导致的局部损失水头。

在稳定入渗情况下，向一侧沟的排水流量为 $q_1=\varepsilon L'$，结合式(2.4.25)，有

$$\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{H}_c - \boldsymbol{H}_0)\frac{1}{\frac{\boldsymbol{L}'}{2\bar{\boldsymbol{h}}} + \frac{2}{\boldsymbol{\pi}}\ln\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\boldsymbol{\pi B}}{4\bar{\boldsymbol{h}}}\right)}} \tag{2.4.26}$$

当 H_c-H_0 相同时，求非完整沟排水流量 q_1 与完整沟排水流量 q_0（见式(2.4.7″)）的比值α

$$\alpha = \frac{q_1}{q_0} = \frac{1}{1 + \frac{4\bar{h}}{\pi L'}\ln\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi B}{4\bar{h}}\right)}} \tag{2.4.27}$$

称α为在有均匀入渗或蒸发情况下非完整沟排水流量的修正系数。

由于 $B << \bar{h}$，$\mathrm{sh}\left(\frac{\pi B}{4\bar{h}}\right) \approx \frac{\pi B}{4\bar{h}}$，式(2.4.27)可近似为

$$\alpha = \frac{q_1}{q_0} = \frac{1}{1 + \frac{8\bar{h}}{\pi L}\ln\frac{2\bar{h}}{\pi B}} \tag{2.4.27′}$$

式中：对于排水明沟，B 取水面宽度；对于排水暗管，B 取暗管直径 d；L 为两排水沟间距。

非完整沟排水情况下的排水沟间距 L 的计算可通过对完整沟间距的计算公式（式(2.4.9)）修正获得，即

$$L = \sqrt{\frac{8K\bar{h}(H_c - H_0)\alpha}{\varepsilon}} \tag{2.4.28}$$

代入α，并整理后，得非完整沟排水间距的计算公式为

$$L = \sqrt{\left(\frac{4\bar{h}}{\pi}\ln\frac{2\bar{h}}{\pi B}\right)^2 + 8\bar{h}\frac{K(H_c - H_0)}{\varepsilon}} - \frac{4\bar{h}}{\pi}\ln\frac{2\bar{h}}{\pi B} \tag{2.4.28′}$$

（2）不透水层位于无限深度的情况

当地下水不透水层埋藏极深（ $\bar{h} \geq L$）时，地下水流条件可相当于透水层无限深的情况，如图 2.11。这种情况仍可用类似方法推求排水沟计算公式。

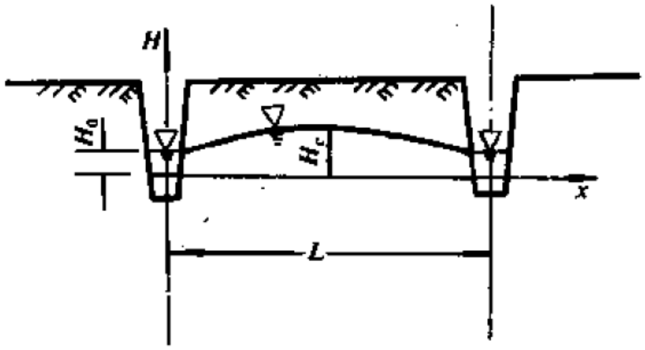


图 2.11　不透水层无限深情况下的排水

求得任一点 x 处的地下水面线方程为

$$H_x - H_0 = \frac{2\varepsilon L}{K\pi}\left[\ln\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{\sin\left(\frac{\pi B}{4L}\right)}\right] \tag{2.4.29}$$

在多数情况下，排水沟间距远大于沟（管）的水面宽（或管径），此时有 $\sin\left(\frac{\pi B}{4L}\right) \approx \frac{\pi B}{4L}$，此时，两沟中间地段中心水位计算公式为

$$H_c - H_0 = \frac{\varepsilon L}{K\pi}\ln\frac{2L}{\pi B} \tag{2.4.30}$$

排水沟间距的计算式为

$$L = \frac{K\pi\left(H_c - H_0\right)}{\varepsilon\ln\frac{2L}{\pi B}} \tag{2.4.31}$$

排入两侧排水沟的流量为

$$q = \varepsilon L \approx \frac{K\pi\left(H_c - H_0\right)}{\ln\frac{2L}{\pi B}} \tag{2.4.32}$$

（二）　地下水非稳定渗流

实际上，排水条件下的地下水渗流大多为非稳定非渐变流问题。如在降雨期间，当降雨入渗补给地下水的水量大于排水沟排出的水量时，地下水位会不断上升；降雨停止后，在排水沟的作用下，水位逐渐回落，地下水运动为非稳定过程。这类问题可以在非稳定渐变流和稳定非渐变流解的基础上近似求解而得。

（1）以非稳定渐变流的解为基础的有效深度法求解排水沟间距

由非稳定渐变流条件下排水沟间距 L 的 Glover 公式(2.4.18)，又知，在非渐变流情况下，由于

水流在非完整沟附近受到束缚作用而产生附加水头损失，使其渗流量小于发生渐变渗流的完整沟（管）时的渗流量。根据式(2.4.27′)，非完整沟的流量 q_1 可自完整沟的流量 q_0 乘以修正系数α 求得：

$$q_1 = \alpha q_0 = 4K\frac{H_c - H_0}{L}\cdot\alpha\frac{H_c + H_0}{2} = 4K\frac{H_c - H_0}{L}\cdot\alpha\bar{h} \tag{2.4.33}$$

称 $\alpha\bar{h}$ 为含水层的有效厚度。

将式中的含水层的平均厚度 $\bar{h}$ 用有效厚度 $\alpha\bar{h}$ 代替，可得到非稳定非渐变流情况下排水沟间距的计算公式

$$L = \pi\sqrt{\frac{K\alpha\bar{h}t}{\mu\ln\frac{4h_0}{\pi s_c}}} \tag{2.4.34}$$

$$\alpha = \frac{1}{1+\frac{8\bar{h}}{\pi L}\ln\frac{2\bar{h}}{\pi B}} \tag{2.4.27′}$$

式中其余符号的含义同（2.4.18）式。

由于在修正系数α 中已含有排水沟间距 L，式(2.4.34)需用迭代的方法求解。

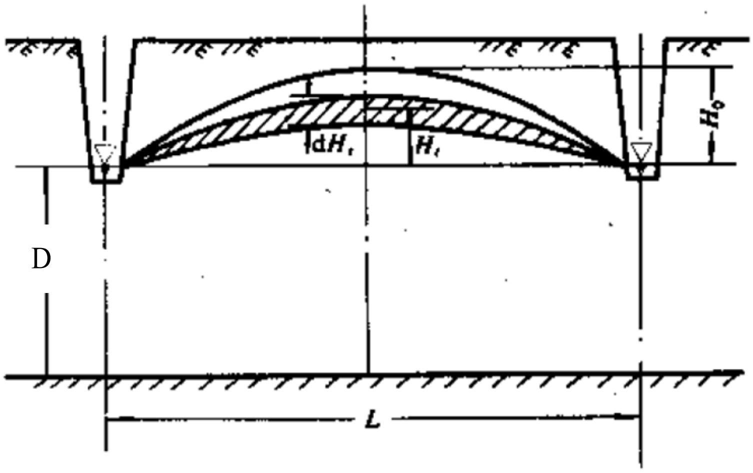
（2）以稳定非渐变流解为基础的变换稳态过程法求解排水沟间距（瞿兴业，1962；张蔚榛，1996）

在假设水流为稳定流的条件下，降雨入渗补给量等于排水沟的排水量 q，即 $q=\varepsilon L$。由稳定非渐变流的求解结果（式(2.4.28)），可得到稳定非渐变流状态下单位长度排水沟两侧进入的排水流量 q 与作用水头 H_i（地段中心水位与沟水位之差）的关系式为

$$q = \frac{8K\bar{h}\alpha H_i}{L} \tag{2.4.28″}$$

式中，在含水土层有限深条件下的α由式(2.4.27′)表示。

考虑降雨停止后，在排水沟作用下，沟间地段地下水位的下降情况。设初始水面为一通过两沟中间一点水位为 H_0 的稳定地下水降落曲线，在 dt 时间内，排水地段中心水位下降了 dH_t，称其所对应的平均水头 H_t 为该处地下水位高出明沟水面或暗管中心的作用水头（如图 2.12 所示）。若在整个排水地段水位均匀下降 dH_t，则所疏干的土层体积为 LdH_t；然而，排水地段地下水位并非均匀下降，真正所疏干的体积（如图 2.12 中阴影部分）等于 LdH_t 乘以地下水面形状修正系数δ。则在 dt 时间内，土壤所释放的水量为$\mu\delta L$dH_t，其中μ为土壤的给水度；δ为地下水面形状修正系数，对于排水明沟，δ= 0.7~0.8；对于排水暗管，δ= 0.8~0.95。



Hc 和 H_0 的标注同图 2.10

图 2.12　　地下水稳态变换过程

在 dt 时段内，水流自时段初的稳定状态变化为时段末的稳定状态，应满足水量平衡方程：$q_t\,\mathrm{d}t=-\mu\delta L\,\mathrm{d}H_t$，即有

$$\frac{8K\bar{h}\alpha H_t}{L}\mathrm{d}t=-\mu\delta L\,\mathrm{d}H_t \tag{2.4.35}$$

对式(2.4.35)由 H_0~H_t 积分，可解得排水沟间距 L

$$L=\frac{Kt}{\mu\delta\varphi\ln\dfrac{H_0}{H_t}}\quad;\quad \varphi=\frac{L}{8\bar{h}\alpha} \tag{2.4.36}$$

在含水土层无限深的情况下，排水流量与作用水头的关系为

$$q=\frac{KH_t}{\Phi},\quad \Phi=\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{\sin\dfrac{\pi B}{2L}}=\frac{1}{\pi}\ln\frac{2L}{\pi B} \tag{2.4.37}$$

采用同样方法可求得非稳定流条件下排水沟间距的计算公式

$$L=\frac{Kt}{\mu\delta\Phi\ln\dfrac{H_0}{H_t}} \tag{2.4.38}$$

三、　考虑潜水蒸发时的非稳定流排水计算

潜水蒸发不仅可以降低地下水位，同时输送盐分至土壤表层，导致土壤的盐渍化。即使修建排水系统后，潜水的蒸发对地下水位的变化仍然起着相当重要的作用，在排水计算中必须考虑。潜水蒸发强度 ε 是地下水埋深和潜在蒸发量（或水面蒸发）的函数，许多作者对这一问题进行了研究，并提出了多种计算公式。其中阿维良诺夫提出的公式（1957）是应用最广泛的公式之一：

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^n \tag{2.4.39}$$

式中，ε_0 为水面蒸发量；Δ为地下水埋深；Δ_0 为潜水蒸发强度接近于零时的地下水埋深，也称极限蒸发深度，与土壤性质和作物生长情况有关；n 为经验指数，与土壤性质和作物生长阶段有关，一般为 1~4。

根据实际观测资料，在地下水埋藏较浅、或作物根系吸水深度较大的情况下，n 值接近于 1（李文渊，1961），于是，式(2.4.39)成为

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\Delta}{\Delta_0}\right) \tag{2.4.39′}$$

式(2.4.39′)能够较确切地反映地下水埋深较浅或根系吸水深度较大时地下水蒸发强度的变化规律，也是相对简单的形式，可以此式作为推导排水沟计算公式的依据。

在地下水侧向径流和天然排水可忽略不计的情况下，地下水下降速度只决定于地下水蒸发强度ε 和土壤给水度μ ，即

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon}{\mu} \tag{2.4.40}$$

将式(2.4.39′)代入式(2.4.40)，积分并整理后可得到

$$h = h_0 + \left(\Delta_0 - \Delta_i\right)\mathrm{e}^{-\eta t} \tag{2.4.41}$$

式中，h 为 t 时刻的地下水位；h_0 为无地下水蒸发时的地下水位，即极限蒸发深度所对应的水位；Δ_i 为起始时的地下水埋深； $\eta = \dfrac{\varepsilon_0}{\mu}\dfrac{1}{\Delta_0}$。

在干旱季节有动态观测资料的地区，参数 Δ_0 和 μ 可根据地下水动态观测资料求得。对不同的初始条件可求得不同的地下水非稳定流方程式。

（1）初始地下水位为水平的情况。

设初始地下水位为常量 h_0，在蒸发和排水沟排水的双重作用下，不同时间的地下水面线如图 2.13 所示，因地下水蒸发强度ε 随埋深的变化而变化，故不同 x 处的蒸发强度不同。

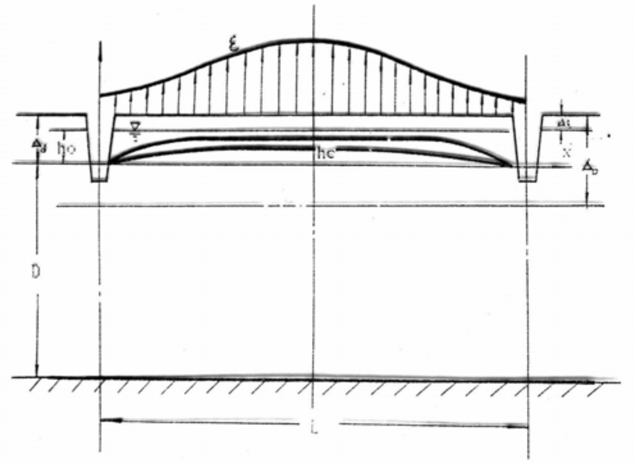


图 2.13　有蒸发时沟间地段地下水运动示意图

两沟中间点的地下水位最高，其计算式为 (张蔚榛, 1963, 1983)：

$$h_c = \Delta_1\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\sqrt{b}} - 1\right) + \frac{4}{\pi}\left[h_0 + \Delta_1\left(1 - \frac{\pi^2}{4\bar{b}}\right)\right]\mathrm{e}^{-\left(\frac{a\bar{b}t}{L^2}\right)} \tag{2.4.42}$$

式中，$b = \dfrac{\varepsilon_0 L^2}{4\Delta_0 K\bar{h}}$；$\bar{b} = b + \dfrac{\pi^2}{4}$；$\Delta_1 = \Delta_0 - D$ 。

如果要求：经过时间 t 的排水使两沟中间一点的地下水位降到 h_1，则排水沟间距 L 的计算式为：

$$L = \sqrt{\frac{4K\bar{h}\,\alpha\bar{b}\,t}{\mu \cdot \ln\left\{\dfrac{4}{\pi} \cdot \dfrac{h_0 + \Delta_1\left(1 - \dfrac{\pi^2}{4\bar{b}}\right)}{h_1 + \Delta_1\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,b}}\right)}\right\}}} \tag{2.4.43}$$

从式(2.4.43)也可以解出地下水位自 h_i 降低到 h_t 所需要的时间 t ：

$$t = \frac{L^2\mu}{K\bar{h}\,\bar{b}} \cdot \ln\left\{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{h_i + \Delta_1\left(1 - \dfrac{\pi^2}{4\bar{b}}\right)}{h_t + \Delta_1\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,b}}\right)}\right\} \tag{2.4.44}$$

（2）初始水面为稳定降落曲线的情况

如前所述，在蒸发和排水的共同作用下，地下水位是一个不断降落的非稳定流过程。瞿兴业等采用瞬间法将整个渗流过程分解为若干个 dt 时段内的稳定渗流过程，这些稳定过程在时间上连续交替，就构成了整个非稳定渗流过程（瞿兴业，张友义，1981）。取初始水位为降落过程中某一稳定地下水降落曲线（见图 2.14），任意时刻 t 的潜水蒸发规律遵循式(2.4.39′) ，为了更清楚起见，改写为如下形式：

$$\varepsilon_t = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\Delta_t}{\Delta_0}\right) \tag{2.4.39″}$$

式中，ε_t、Δ_t 分别为 t 时刻的潜水蒸发强度和地下水埋深，其余符号同前。

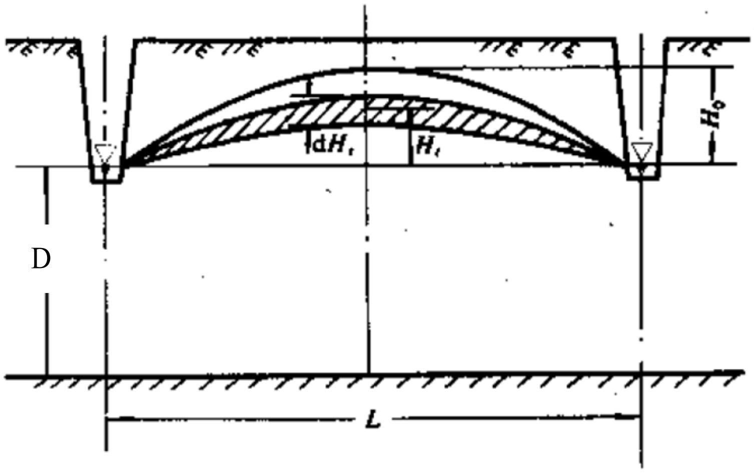


图 2.14　考虑蒸发并初始为稳定降落曲线时沟间地段地下水运动示意图

由于在 dt 时段内地下水运动可视为稳定运动，根据稳定渗流理论分析结果，单位面积排水强度ε_q与排水地段作用水头 H_t之间呈一次方函数关系，即

$$\varepsilon_q = \frac{KH_t}{\psi L} \tag{2.4.45}$$

其中，ψ 为渗流阻抗系数，由排水地段和沟（暗管）的几何参数决定，不同情况下ψ的表达形式如下：

当满足 $L \geq 2D$（D 为沟水位距不透水底板的距离）时，

明沟：
$$\psi = \frac{1}{\pi}\ln\frac{2D}{\pi B} + \frac{L}{8D} \tag{2.4.46}$$

暗管：
$$\psi = \frac{1}{\pi}\ln\frac{D}{\pi\sqrt{H_t B}} + \frac{L}{8D} \tag{2.4.47}$$

当 $L<2D$ 时，

明沟：
$$\psi = \frac{1}{\pi}\ln\frac{2L}{\pi B} \tag{2.4.48}$$

暗管：
$$\psi = \frac{1}{\pi}\ln\frac{L}{\pi\sqrt{H_t B}} \tag{2.4.49}$$

建立 dt 时段内排水地段的水量平衡方程：

$$\varepsilon_q L\,\mathrm{d}t + \delta\varepsilon_t L\,\mathrm{d}t = -\delta\mu L\,\mathrm{d}H_t \tag{2.4.50}$$

将(2.4.39′′)式和(2.4.45)式代入(2.4.50)式，分离变量，并按 t 从 0 到 t、H_t 从 H_0 到 H_t 积分（渗流阻抗系数中的 H_t 可近似取为 H_0 和 H_t 的平均值），可得到该相应条件下计算排水沟（管）间距的半理论公式（瞿兴业、张友义, 1981）：

$$L = \frac{Kt}{\delta\mu\psi\left(\ln\frac{H_A + H_0}{H_A + H_t} - \frac{\varepsilon_0 t}{\mu\Delta_0}\right)} \tag{2.4.51}$$

其中

$$H_A = \frac{\Delta_0 - \Delta_d}{1 + \frac{K\Delta_0}{\delta\psi L\varepsilon_0}} \tag{2.4.52}$$

式中，H_0 和 H_t 分别为排水地段中心处在排水时段 t 始末的作用水头；δ为地下水面形状修正系数，明沟取 0.7~0.8，暗管取 0.8~1.0；μ为地下水位变幅内含水层的给水度；其余符号同前。

当$\Delta_d = \Delta_0$时，有 H_A=0，式(2.4.51)简化为

$$L = \frac{Kt}{\delta\mu\psi\left(\ln\frac{H_0}{H_t} - \frac{\varepsilon_0 t}{\mu\Delta_0}\right)} \tag{2.4.53}$$

当蒸发极微弱时，$\varepsilon_0 \approx 0$，$H_A \approx 0$，式(2.4.51)简化为无蒸发纯排水条件下的间距计算公式：

$$L = \frac{Kt}{\delta\mu\psi\ln\frac{H_0}{H_t}} \tag{2.4.54}$$

第三章　井流条件下的地下水运动

自然界的含水层从渗透性上可分为强透水层和弱透水层，从封闭性上可分为承压含水层(confined aquifer)和潜水含水层，它们共同构成地下水流动的地层空间。当水井从含水层中取水时，将形成以水井为中心的地下水径向流或近似径向流，潜水面或测压水位面低于没有水井干扰时的高度，呈现漏斗状，被称为地下水的“降落漏斗”。这种由井孔和含水层构成的地下水渗流空间称为含水层-井孔系统(Aquifer-well System)，含水层-井孔系统的地下水流问题称为井流(well flow)问题。通过建立描述含水层-井孔地下水流的数学模型并获取解析解，可以掌握地下水以稳定方式或非稳定方式在井周运动的基本规律。本章将阐述各种含水层类型和特殊条件下的井流模型。

第一节　地下水井流模型的发展与应用

研究含水层-井孔地下水流的运动规律，是地下水动力学最重要的任务之一。在 1856 年法国科学家达西提出渗流力学领域奠基性的达西定律之后不久，法国工程师裘布依就开始把达西定律用于分析潜水井和承压水井周围的地下水运动，建立了著名的裘布依公式(张宏仁, 1992)。裘布依公式开创了含水层-井孔系统地下水的稳定流理论。此后的 30 多年里，有关地下水的工程计算一直沿用这种稳定井流理论，并演变为含有“影响半径”的 Theim 公式，前苏联及中国直到 20 世

纪 70 年代仍然以此为基础进行地下水资源评价。然而，稳定流的形成需要十分严格的条件，自然界的地下水运动实际上以非稳定的、可变的流动为主，用稳定流假设来解决非稳定流动问题可能会得出不合理的结论。

1935 年，美国工程师 Theis 给出了第一个含有时间的抽水井地下水流公式，经过后人改写成为著名的 Theis 公式(Theis, 1935)。Theis 公式一经提出，立刻显示出它对抽水井观测资料的适应性，取得了地下水研究的突破性进展。此后，Jacob(1940) 建立了含水层-井孔地下水流更加严格的数学描述，并从偏微分方程重新推导出了 Theis 公式。新的井流试验分析方法取代 Theim 公式建立起来了，不仅可以得到含水层的导水系数或渗透系数，还可以获得含水层的储水系数。非稳定井流理论并没有停留于 Theis 公式。Jacob 和 Lohman (1952)提出了定降深井流问题的解析解。Hantush 和 Jacob(1955)提出了有越流补给承压含水层中的非稳定井流模型。此后，还有更复杂的越流系统井流模型提出，如 Hantush(1960)模型考虑了弱透水层贮存量的释放。Theis 公式的严格适用范围是无越流的承压含水层，在用于潜水含水层抽水试验时则有一定欠缺。Boulton (1954, 1963)提出的井流模型，通过引入"延迟指数"刻画潜水面下降释水的滞后性，得到潜水含水层抽水井流的解析解，再现了井流试验中降深演变的三个阶段。然而，延迟指数是一个经验性参数，与含水层现有物理参数之间的关系尚不清楚。Newman (1972) 提出的潜水含水层井流模型完全不需要延迟指数，只是把井孔周围的地下水流作为三维流处理，其解析解也可以得到包含三个阶段的降深变化曲线。随着大量考虑各种条件的井流模型问世，含水层-井孔地下水非稳定流理论日趋成熟，并逐渐取代稳定流理论主导井流试验分析。

中国的地下水学科是借鉴前苏联建立起来的，非稳定井流理论传入的时间较晚，主要在 20 世纪 70 年代，大量学者通过引进、吸收和发展，完善了国内的现代地下水动力学研究。陈雨孙(1977)编著的《单井水力学》把井管内的水流运动和地下水运动结合起来，研究单井稳定流和非稳定流抽水试验中的三维流场特征，推导出比 Theis 公式更完善的三维降深解。张蔚榛(1983)等在此基础上建立了三层结构含水层系统非稳定井流模型，并考虑了弱透水层的释水。陈崇希(1981)运用 Girinskii 势函数提出了层状非均质含水层承压-无压转换的非稳定井流计算方法。李佩成(1981, 1990)用"割离井"法把井群抽水问题转化为有限边界内的含水层-井孔水流模型。胡佩青(1982)对具有各种边界的有越流含水层-面井水流问题进行了分析。对潜水含水层单井瞬时抽水问题，宿青山和高鹭陵(1985)提出了计算公式。张蔚榛(1989)分析了井筒储集效应对延迟给水潜水含水层非稳定流的影响。刘慈群(1986, 1987)、缪俊发和吴林高(1995)专门提出了一种粘弹性含水层中的井流理论。潘元伯、左其亭(1992) 发展了扇形含水层井流计算的方法，涵盖了不满足映射条件的扇形含水层。常安定和王洪胜等(2000)把井周紊流-层流双区模型推广到了具有非抛物线型的条件。王旭升和陈崇希等(2002, 2003)建立了考虑盖层弯曲效应的承压含水层井流模型。这些研究丰富了地下水动力学的内容。

第二节　稳定井流模型

在抽水井或注水井的作用下，产生随空间和时间变化的含水层降深。如果含水层任意点的降深都不随时间变化，则形成了含水层-井孔系统的地下水稳定流，可以利用相应的稳定流模型分析水头的空间分布特征。根据模型所对应的水文地质条件，可以把含水层-井孔稳定流模型分为以下

类型。这种模型又可以称为稳定井流模型。

一、 裘布依模型

法国工程师裘布依(J. Dupuit)在 1863 年提出了著名的稳定井流模型(陈崇希等, 1999)。该模型的研究对象是均质各向同性的潜水含水层，假定含水层呈圆柱形，具有水平展布的隔水底板，地下水无入渗补给或蒸发排泄。该模型在含水层中心部位设置一完整竖井抽水，而半径为 R 的圆周边界处理为定水头边界（图 3.1）。竖井以恒定流量 Q 抽水将导致地下水从圆周边界流向井内，并最终达到稳定状态。裘布依假定含水层水流为水平方向，因此地下水呈辐射状流向含水层中心位置。

均质各向同性潜水含水层的径向流，可以通过把直角坐标系的地下水流方程转化为轴对称形式得到

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[(H-z_0)r\frac{\partial H}{\partial r}\right]=\frac{S_y}{K}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{3.2.1}$$

其中 H 为潜水面的高度，z_0 为含水层底板的高度，S_y 和 K 分别为给水度和渗透系数，r 和 t 分别为径向距离和时间。

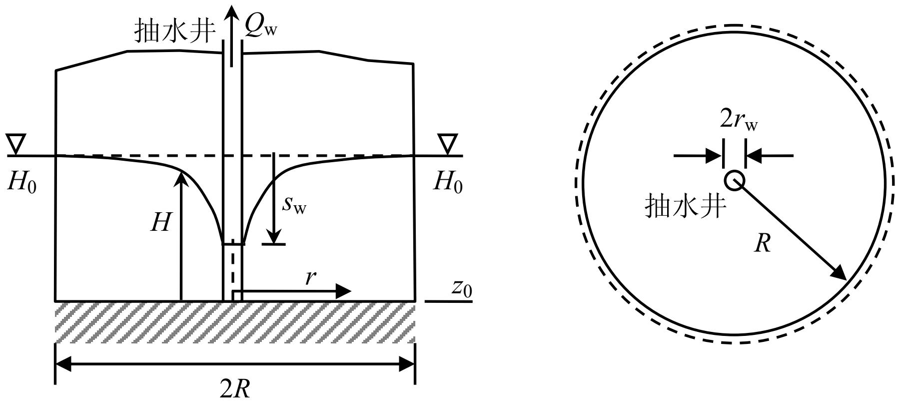


图 3.1 裘布依模型示意图

取 z_0 =0，并考虑稳定流条件，则可以采用以下的数学模型描述裘布依稳定井流模型

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}(H^2)\right]=0，\ r_w \le r \le R \tag{3.2.2}$$

$$H=H_0，\ r=R；\ H=H_w，\ r=r_w \tag{3.2.3}$$

联立式(3.2.2)与(3.2.3)求解得到

$$H^2=H_0^2-\frac{H_0^2-H_w^2}{\ln(R/r_w)}\ln\frac{R}{r} \tag{3.2.4}$$

任何半径为 r 的过水断面处，通过的流量为井流量 Q，利用达西定律，有

$$Q = 2\pi rKH\frac{\partial H}{\partial r} = \pi K\frac{H_0^2 - H_w^2}{\ln(R/r_w)} \tag{3.2.5}$$

因此，式(3.2.4)又可以写为

$$H^2 = H_0^2 - \frac{Q}{\pi K}\ln\frac{R}{r} \tag{3.2.6}$$

式(3.2.6)给出了抽水井周围潜水面的曲面形态。如果取井中水位降深 $s_w = H_0 - H_w$，则抽水井的流量可以根据该降深求出

$$Q = \pi K\frac{(2H_0 - s_w)s_w}{\ln(R/r_w)} \tag{3.2.7}$$

这就是潜水完整井的裘布依公式。

裘布依稳定井流模型被推广到无越流的承压含水层，只要把潜水面条件修改为水平展布的隔水顶板即可，但需要重新建立数学模型。均质各向同性承压含水层的径向流，可以通过把直角坐标系的地下水流方程转化为以下轴对称形式

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial H}{\partial r}\right] = \frac{S}{T}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{3.2.8}$$

则承压含水层裘布依稳定井流模型的地下水流控制方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}(H)\right] = 0\text{，}\ r_w \le r \le R \tag{3.2.9}$$

边界条件仍然用式(3.2.3)描述。而井流量的表达式变为

$$Q = 2\pi rT\frac{\partial H}{\partial r} \tag{3.2.10}$$

联立式(3.2.9)与(3.2.3)，并利用式(3.2.10)求解得到

$$H = H_0 - \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{R}{r} \tag{3.2.11}$$

则井流量与井中水位降深 s_w 的关系为

$$Q = 2\pi T\frac{s_w}{\ln(R/r_w)} \tag{3.2.12}$$

这就是承压水完整井的裘布依公式。必须在确保井中水位仍然高于含水层顶板时才可以使用该式。

二、 有越流承压水稳定井流模型

当存在越流时，在无限延伸的承压含水层中抽水也有可能出现稳定流，在此建立一个简化的分析模型。设均质各向同性的承压含水层具有水平展布的隔水底板，具有一个厚度稳定的弱透水层顶板，上部是一个水头保持为 H_0 的潜水含水层或承压含水层。假定承压含水层中的地下水流为水平方向，初始状态的水头为 H_0（图 3.2）。

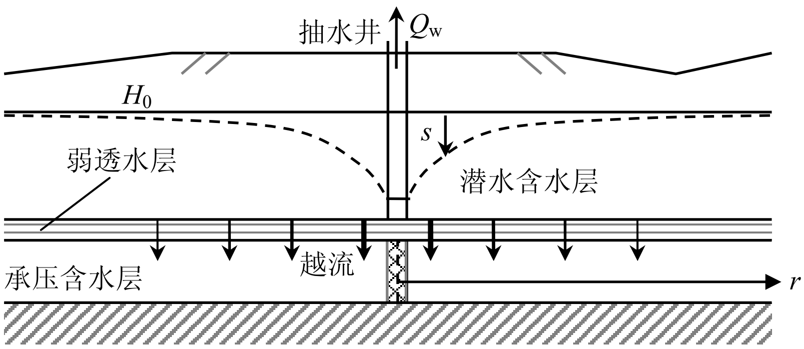


图 3.2 有越流承压水井流模型示意图

在这种情况下，地下水流的控制方程为

$$T\left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right)+L_c(H_0-H)=0 \tag{3.2.13}$$

式中：$L_c=K_c/m_c$ 为越流系数(leakance)，K_c 和 m_c 分别为弱透水层的垂向渗透系数和厚度。把上述控制方程中的自变量转换为降深 $s=H_0-H$，并引入边界条件，得到对应的数学模型

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}-\frac{s}{B^2}=0 \tag{3.2.14}$$

$$s=0,\ r=\infty;\ s=s_w,\ r=r_w \tag{3.2.15}$$

式中：$B=(T/L_c)^{1/2}$，为越流因子(leakage factor)。根据 Bessel 方程的性质，控制方程(3.2.14)的通解为

$$s=C_1I_0(r/B)+C_2K_0(r/B) \tag{3.2.16}$$

式中：I_0 为零阶第一类虚宗量 Bessel 函数；K_0 为零阶第二类虚宗量 Bessel 函数；C_1 和 C_2 为待定常数。利用边界条件(3.2.15)可以得到

$$s=\frac{s_w}{K_0(r_w/B)}K_0(r/B) \tag{3.2.17}$$

井流量的表达式为

$$Q=-2\pi r_wT\left.\frac{\partial s}{\partial r}\right|_{r=r_w}=2\pi r_wT\frac{K_1(r_w/B)}{B}\frac{s_w}{K_0(r_w/B)}$$

代入式(3.2.17)得到

$$s=\frac{Q}{2\pi T}\frac{K_0(r/B)}{(r_w/B)K_1(r_w/B)} \tag{3.2.18}$$

当 $r_w/B\to 0$ 时（通常 B 较大，这一点容易被满足），上式简化为

$$s=\frac{Q}{2\pi T}K_0(r/B) \tag{3.2.19}$$

从而井流量与井中水位降深的关系可以近似处理为

$$Q = \frac{2\pi T s_w}{K_0(r_w / B)} \tag{3.2.20}$$

显然，必须在确保井中水位仍然高于含水层顶板时才可以使用上述解析解。

三、 抽灌井群稳定流模型

当承压含水层或潜水含水层中同时存在抽水井和注入井时，如果抽取流量与注入流量相同，有可能形成地下水的稳定流动。借助抽灌井群稳定流模型，可以分析含水层水头的空间分布特征。另外，如果在有河流补给的含水层或滨海含水层抽取地下水，也可能形成稳定流，这种问题需采用镜像法转化为抽灌井群模型进行分析。

首先考虑对井抽灌模型。在无限延伸的承压含水层中分别有一口抽水竖井和注水竖井，均为完整井，抽取流量与注入流量均为 Q，井间距为 L；含水层为均质各向同性。根据叠加原理，这个模型有两种解析途径：① 利用复变函数方法进行叠加；②利用单井的稳定流模型进行叠加。下面主要讨论后一种方法。已知承压含水层单井稳定流模型的解析解为式(3.2.11)，对无限含水层不妨表示为

$$H = H_0 + \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r}{R \to \infty} \tag{3.2.21}$$

式中：H_0 为无穷远处的水头；Q 为抽水井的流量。考虑叠加原理，抽水井和注水井干扰流场的水头分布为

$$H(x,y) = H_0 + \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r_1}{R \to \infty} - \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r_2}{R \to \infty} \tag{3.2.22}$$

式中：r_1 和 r_2 分别为观察点(x, y)与抽水井和注水井的距离。式(3.2.22)可进一步简化为

$$H(x,y) = H_0 + \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r_1}{r_2} \tag{3.2.23}$$

这就是对井抽灌稳定流的解析解，其中 Q 为抽水流量(Q>0)。显然，以抽灌井连线的中点为坐标原点，抽水井坐标为$(x = -L, 0)$，注水井坐标为$(x = L, 0)$，则式(3.2.23)可展开为

$$H(x,y) = H_0 + \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{(x+L)^2 + y^2}{(x-L)^2 + y^2} \tag{3.2.24}$$

当单个的抽水井在无限长的一个定水头边界附近抽水时，可通过镜像法在边界另一侧映射一个注水井，即抽水井为实井，注水井为虚井，两井与边界的距离相同。由这样的实井和虚井共同作用形成的稳定流也可用式(3.2.23)描述。

如果同时存在若干抽水井和若干注水井，则稳定流的形成条件是抽水总流量与注水总流量相同，稳定流的解析解为

$$H(x,y) = H_0 + \frac{1}{2\pi T} \sum_{i=1}^{N} Q_i \ln r_i \,, \quad \sum_{i=1}^{N} Q_i = 0 \tag{3.2.25}$$

式中：N 为总井数；Q_i 为井 i 对应的流量，以抽水为正，注水为负；r_i 为观察点(x, y)与井 i 的距离。

四、 承压-无压转换的稳定井流模型

当一个承压含水层被抽水井强烈开采时，地下水的测压水头面在井周附近可能下降到含水层的顶板以下，从而形成局部的非承压区（含有潜水面）。假定空气能够快速的进入含水层被疏干的部分，则这种状态下的含水层可称为承压-无压含水层（图 3.3）。对于井附近的稳定径向流问题，承压状态和无压状态存在明显的区别：承压状态的导水系数为常数，而无压状态的导水系数与潜水面的高度有关。陈崇希等(1961)曾用分段法分析过单井稳定流，但分段法难以解决群井稳定流问题。

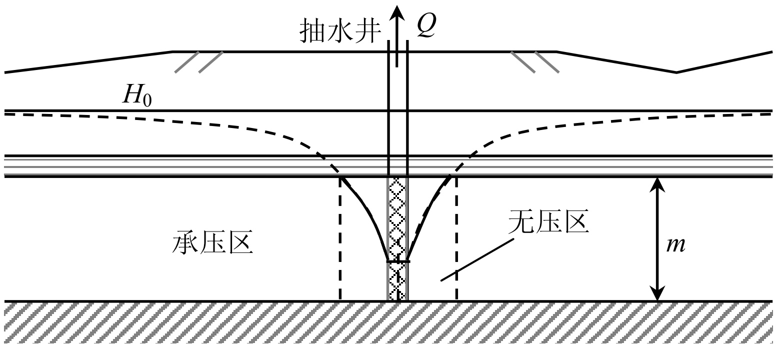


图 3.3 承压-无压转换井流

Girinskii 势函数(Girinskii, 1946; Bear, 1972) 是一种解决层状含水层系统水流问题的势函数，在均质承压含水层中定义为

$$\varphi = Km\left(H - \frac{m}{2}\right) \tag{3.2.26}$$

在潜水含水层中定义为

$$\varphi = \frac{1}{2}K(H - z_0)^2 \tag{3.2.27}$$

这样，当地下水流向单个井时，半径为 r 的圆周位置含水层侧向流量（流向井为正）为

$$Q = 2\pi r\frac{\partial \varphi}{\partial r} \tag{3.2.28}$$

上式同时适用于承压状态和无压状态，其解析解的通式为

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln r + C_0 \tag{3.2.29}$$

式中：C_0 是一个取决于边界条件的常量。如果同时有多个开采井和注水井在无限扩展的含水层中形成稳定流，则利用叠加原理可得某个观察点的 Girinskii 势函数解析解

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{2\pi}\ln r_i\,,\quad \sum_{i=1}^{N}Q_i = 0 \tag{3.2.30}$$

式中：N 为总井数；Q_i 为井 i 对应的流量，以抽水为正，注水为负；r_i 为观察点(x, y)与井 i 的距离。φ_0 表示无限远处的 Girinskii 势函数。

承压状态与无压状态的转换条件，取决于以下的临界 Girinskii 势函数

$$\varphi_c = \frac{1}{2}Km^2 \tag{3.2.31}$$

当$\varphi<\varphi_c$时为无压状态，否则为承压状态，由此可以确定承压-无压转换的边界位置。

第三节　无越流承压含水层非稳定井流

在抽水井或注水井的作用下，如果含水层某点的降深随时间不断变化，则形成了含水层-井孔系统地下水的非稳定流，可以利用相应的非稳定流模型分析水头的时空演变特征。这种模型又被称为非稳定井流模型。本节对无越流的承压含水层条件建立非稳定井流模型。

一、　定流量竖井：Theis 井流模型

最早的非稳定流公式是 Theis 在 1935 年通过借用热传导理论而得到的(Theis, 1935)，后经 Jacob(1940)的发展，建立了比较完备的无越流承压含水层非稳定流模型。这一模型需要采用如下假设：① 含水层水平无限延伸、均质各向同性、厚度为常数；② 含水层地下水流处处服从达西定律；③ 井孔穿越整个含水层、井径无限小、流量为常数 Q；④含水层的水头变化与弹性变形瞬时同步发生；⑤ 含水层的初始条件是处于静止状态。在这些假设基础上，可以建立轴对称坐标系降深函数 $s(r, t)$的控制方程为

$$T\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right)=S\frac{\partial s}{\partial t} \tag{3.3.1}$$

以及初始条件

$$s(r,t=0)=0 \tag{3.3.2}$$

和边界条件

$$s(r\to\infty,t)=0 \tag{3.3.3}$$

$$Q=-\lim_{r\to 0}\left(2\pi rT\frac{\partial s}{\partial r}\right) \tag{3.3.4}$$

其中，式(3.3.4)所描述的是井孔边界条件。

考虑到问题的轴对称性质，利用 Hankel 变换及其逆变换，我们可以得到降深的解析解为

$$s=\frac{Q}{4\pi T}W\left(\frac{S}{T}\frac{r^2}{4t}\right)=\frac{Q}{4\pi T}W(u), \quad u=\frac{S}{T}\frac{r^2}{4t} \tag{3.3.5}$$

这就是 Theis 公式。其中，函数 $W(u)$被称为 Theis 井函数，实际上是一个指数积分

$$W(u)=-E_i(-u)=\int_u^\infty \frac{e^{-y}}{y}dy \tag{3.3.6}$$

当 $u<0.1$ 时，用以下近似式所产生的相对误差小于 5 %，即

$$W(u)\approx -0.577216-\ln u \tag{3.3.7}$$

于是 Theis 公式可近似写为

$$s \approx \frac{Q}{4\pi T}\ln\frac{2.25Tt}{r^2 S} \tag{3.3.8}$$

这表明某一点的降深曲线 s-ln$t$ 是一条直线，从而为利用抽水试验求含水层参数(T, S)提供了简单的方法。

从 Theis 公式可以推导得到降深的变化速率

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{Q}{4\pi T}\frac{1}{t}e^{-u} \tag{3.3.9}$$

当 u<0.01，即 $t > 25r^2S/T$ 时，以下近似式的相对误差小于 1 %

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{Q}{4\pi T}\frac{1}{t} \tag{3.3.10}$$

这表明在较长时间之后，在半径为 r 的范围内，水头下降的速率几乎不随离井距离而变化。这种状态被称为拟稳定流状态，但并不意味着出现了稳定流（图 3.4）。

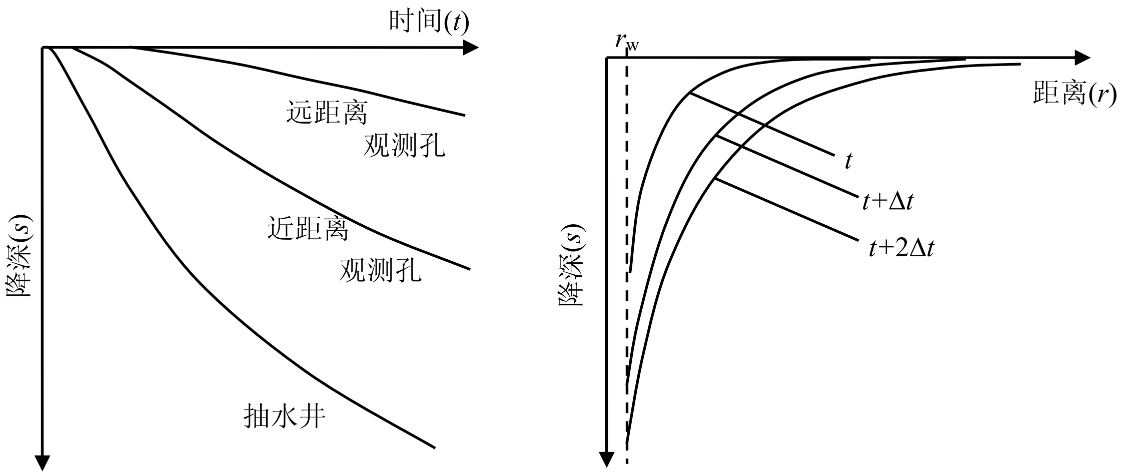


图 3.4 Theis 井流模型中降深随时间和距离的变化曲线

二、 定降深竖井

在某些情况下，井孔的水头是稳定的，而井孔与含水层之间交换的流量随时间发生变化，并引起含水层水头的变化。如自流井的井盖打开时，井孔内测压水位高度将迅速下降到井口附近并趋于不变，而井口流量却逐渐减小。再如，通过井孔往含水层注水可能使井中水位溢出地面并保持不变，而注入流量却逐渐减小。在这种情况下，Theis 井流模型不再适用，但我们只要把假设③中的定流量条件修改为定降深条件，就可以建立定降深井流模型。这个模型的数学描述方程与 Theis 井流模型基本相同，只要把井孔边界条件(3.3.4)修改为以下方程即可

$$s(r \to 0, t) = s_w \tag{3.3.11}$$

其中 s_w 是井孔的已知降深，即初始水头与开始定降深状态后瞬时稳定下来的井孔水头之差。由控制方程(3.3.1)~ (3.3.3)和方程(3.3.11)构成的定解问题有以下解析解

$$s = s_w A(r_D, t_D)\text{，}\quad r_D = r / r_w\text{，}\quad t_D = Tt / (r_w^2 S) \tag{3.3.12}$$

式中：r_w 为井孔半径，$A(r_D, t_D)$为定降深井函数，其展开式为

$$A(r_D, t_D) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_0(x) Y_0(r_D x) - Y_0(x) J_0(r_D x)}{J_0^2(x) - Y_0^2(x)} e^{-t_D x^2} \frac{dx}{x} \tag{3.3.13}$$

其中 $J_0(x)$为零阶第一类 Bessel 函数，$Y_0(x)$为零阶第二类 Bessel 函数。

当 t_D<0.05 时，近似有

$$A(r_D, t_D) = \frac{1}{\sqrt{r_D}} \left\{ erfc\left(\frac{r_D - 1}{2\sqrt{t_D}} \right) + \frac{(r_D - 1)\sqrt{t_D}}{4 t_D} ierfc\left(\frac{r_D - 1}{2\sqrt{t_D}} \right) \right\} \tag{3.3.14}$$

而当 t_D>500 时，近似有

$$A(r_D, t_D) \approx \frac{1}{\ln(2.25 t_D)} W\left(\frac{S}{T} \frac{r^2}{4t} \right) \tag{3.3.15}$$

通常在一定时间之后，可以采用式(3.3.15)作为近似井函数。

我们最关心的还是井孔的流量，根据达西定律，有

$$Q = 2\pi T s_w G(t_D) \tag{3.3.16}$$

其中，$G(t_D)$为定降深井的流量函数。按 Jacob 等(1952)的研究，为

$$G(t_D) = \frac{4 t_D}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\pi}{2} x \exp(-t_D x^2) + tg^{-1} \left[\frac{Y_0(x)}{J_0(x)} \right] \right\} dx \tag{3.3.17}$$

按张蔚榛(1983)的研究，为

$$G(t_D) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{u[J_0^2(u) + Y_0^2(u)]} e^{-u^2 t_D} du \tag{3.3.18}$$

当 t_D<0.05 时，有

$$G(t_D) \approx 0.5 + \frac{1}{\sqrt{\pi t_D}} \tag{3.3.19}$$

当 t_D>500 时，有

$$G(t_D) \approx 2 / W\left(\frac{1}{t_D} \right) \approx \frac{2}{\ln(2.25 t_D)} \tag{3.3.20}$$

其中，式(3.3.20)是通常被使用的近似式，因为井孔半径通常很小，t_D>500 的条件很容易达到。

三、 变流量竖井

定流量竖井和定降深竖井是变流量竖井的特例。对于流量随时间连续变化的竖井，我们需要把 Theis 井流模型假设③中的定流量 Q 修改为可变流量 $Q(t)$。首先考虑一种极端的情况，在极小

的时间段 dτ 内从含水层抽取水体积为 dV，然后停止抽水。这种抽水井孔可抽象为平面瞬时点源，有

$$dV = \lim_{t\to 0} Q(t)d\tau \tag{3.3.21}$$

当 t>$d\tau$时，井孔流量 $Q(t)$为零。对应这个瞬时点源的降深函数为(陈崇希等, 1999)

$$s = \frac{1}{4\pi T}\frac{dV}{t}\exp\left(-\frac{r^2S}{4Tt}\right) \tag{3.3.22}$$

变流量井可视为连续点源，其降深函数为瞬时点源解的卷积，即

$$s = \frac{1}{4\pi T}\int_0^t \frac{Q(\tau)}{t-\tau}\exp\left[-\frac{r^2S}{4T(t-\tau)}\right]d\tau \tag{3.3.23}$$

当井流量为常数时，上式可以退化为 Theis 公式。

第四节　潜水含水层非稳定井流

潜水含水层与承压含水层对井孔扰动的响应具有完全不同的特征，这是因为：潜水含水层存在潜水面，当含水层水位变化时，其饱和带的厚度随之变化，从而导水系数是时间和空间的函数，而非常量；潜水含水层水分的释放机制主要是潜水面下降引起的重力排水，与包气带毛细水的运动有关，水分向饱和带的释放显著滞后于潜水面的下降；在井孔附近，潜水面明显偏离水平面，地下水具有强烈的三维流特征。Boulton(1954, 1963)最早提出了潜水面滞后排水的假设模型，并在此基础上获得了潜水含水层-井孔非稳定流的解析解。此后，Neuman(1972, 1975)考虑垂向流速建立了不同的模型，也获得了解析解。

一、　考虑滞后排水的 Boulton 模型

Boulton 模型对含水层条件的假设具有和 Theis 井流模型类似的地方，即：① 含水层水平无限延伸、均质各向同性；②含水层的地下水流处处服从达西定律；③单个井孔穿越整个含水层、井径无限小、抽水流量为常数 Q；④整个非稳定流过程中降深始终远小于饱和带厚度，从而导水系数 T 近似为常量，且弹性储水系数 S 近似为常量；⑤ 含水层地下水的初始状态为静止；⑥除抽水井孔外,无入渗或蒸发等源汇项；⑦潜水面的滞后排水可以用固定的疏干过程线描述。Boulton 潜水井流模型由图 3.5 所示。

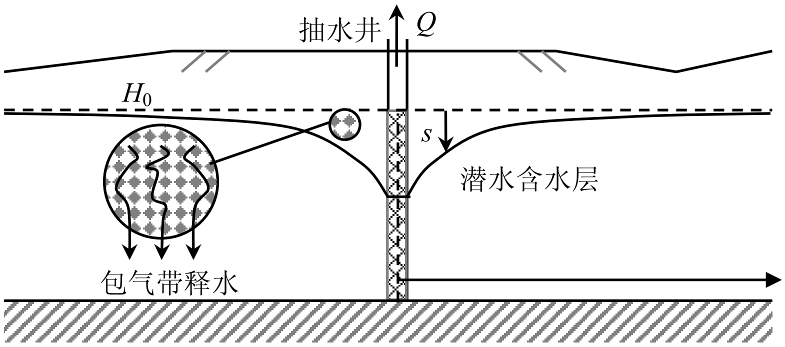


图 3.5 Boulton 潜水井流模型示意图

根据 Boulton 的假定，当潜水面在时刻τ 发生瞬时降深Δs 时，在 $t>\tau$ 的时间内包气带重力排水的过程可以用下式描述

$$q(t) = S_y \alpha \Delta s \exp[-\alpha(t-\tau)] \tag{3.4.1}$$

式中：$q(t)$为排水速率(LT^{-1})，S_y 为充分排水条件下的重力给水度，α是一个经验系数(T^{-1})，称为滞后指数(delay index)。α 越小包气带排水的延迟作用越强。式(3.4.1)相当于把包气带的滞后排水等效为线性水箱的排水过程。

Boulton 把潜水含水层的贮存量释放分为弹性释水（与承压含水层一致）和包气带延迟排水两个部分，建立了如下的地下水流控制方程

$$T\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right) = S\frac{\partial s}{\partial t} + \alpha S_y \int_0^t \frac{\partial s}{\partial \tau} \exp[-\alpha(t-\tau)] d\tau \tag{3.4.2}$$

其中储水系数 S 用初始饱和厚度计算。边界条件和初始条件与 Theis 井流模型相同。该问题的解析解用井函数符号可表示为

$$s(r,t) = \frac{Q}{4\pi T} W\left(u_e, u_d, \frac{r}{B}\right) \tag{3.4.3}$$

其中

$$u_e = \frac{r^2 S}{4Tt},\ u_d = \frac{r^2 \mu}{4Tt},\ B = \sqrt{\frac{T}{\alpha S_y}} \tag{3.4.4}$$

而 $W(u_e, u_d, r/B)$为 Boulton 井函数。注意这里的参数 B 与越流因子 B 的物理意义不同。

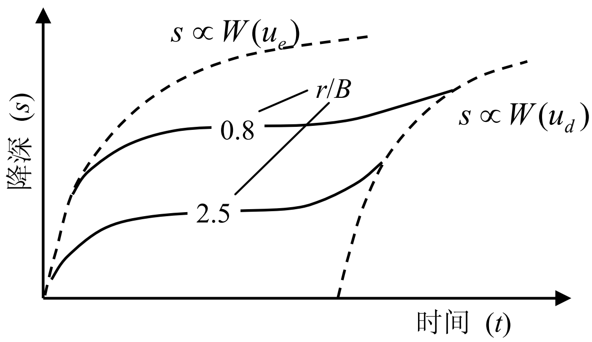


图 3.6　潜水井流模型的降深变化曲线特征

通常给水度远大于储水系数，即 $S_y >> S$，这时上述解析解可简化为

$$s(r,t)=\frac{Q}{4\pi T}\int_0^\infty 2J_0\left(\frac{r}{B}x\right)\left[1-\frac{1}{x^2+1}\exp\left(-\frac{\alpha t x^2}{x^2+1}\right)-F(x)\right]\frac{dx}{x} \tag{3.4.5}$$

其中：

$$F(x)=\frac{x^2}{x^2+1}\exp\left[-\alpha t\frac{S+\mu}{S}(x^2+1)\right] \tag{3.4.6}$$

这个解析解所反映的降深时变曲线(图 3.6)可分为 5 个阶段：

抽水初期为

$$s(r,t)=\frac{Q}{4\pi T}W(u_e)$$

抽水早期为

$$s(r,t)=\frac{Q}{4\pi T}W(u_e,\frac{r}{B}) \tag{3.4.7}$$

抽水中期为

$$s(r,t)\approx\frac{Q}{4\pi T}K_0\left(\frac{r}{B}\right) \tag{3.4.8}$$

抽水晚期为

$$s(r,t)=\frac{Q}{4\pi T}W\left(u_d,\frac{r}{B}\right) \tag{3.4.9}$$

抽水末期为

$$s(r,t)=\frac{Q}{4\pi T}W(u_d)$$

式中：$W(u_e, r/B)$为潜水含水层完整井流的 I 组井函数；$W(u_d, r/B)$为潜水含水层完整井流的 II 组井函数；$K_0(r/B)$为虚变量零阶第二类 Bessel 函数。当时间足够小时，式(3.4.5)所决定的井函数以 Theis 井函数 W(u_e)为渐近线；当时间足够大时，式(3.4.7)所决定的井函数以 Theis 井函数 W(u_d)为渐近线。

Prickett(1965) 报道了不同岩性潜水含水层中进行的抽水试验结果，并计算了 Boulton 延迟指数，发现随岩性颗粒变细，$1/\alpha$ 迅速增大，滞后排水特征越显著。然而，Boulton 延迟指数与含水层孔隙度、粒径等物理参数之间的定量关系尚不清楚。

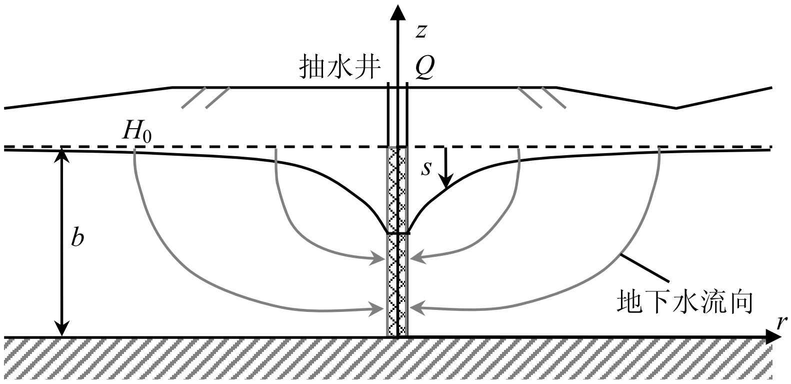


图 3.7　Neuman 潜水井流模型示意图

二、　考虑垂向流速的 Neuman 模型

Neuman(1972，1975)建立了与 Boulton 模型不同的潜水井流模型（图 3.7），其假设基本与上述 Boulton 模型假设相同，但第⑦条假设被改为：潜水面降深与饱和带厚度相比较小，可以把渗流的上边界处理为初始的潜水面。与 Boulton 模型中降深仅为径向距离 r 的函数不同，在 Neuman 模型中，降深是径向距离 r 和铅直高度 z 的二元函数，模型需要用到三维渗流方程：

$$K_r\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right)+K_z\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}=S_s\frac{\partial s}{\partial t} \tag{3.4.10}$$

其中 K_r 和 K_z 分别为含水层的径向与垂向渗透系数。其初始条件为

$$s(r,z,t=0)=0 \tag{3.4.11}$$

而边界条件有 4 个，分别为

$$s(r=\infty,z,t)=0 \tag{3.4.12}$$

$$Q=-\lim_{r\to 0}\left(2\pi rK_r\int_0^b\frac{\partial s}{\partial r}dz\right) \tag{3.4.13}$$

$$\left.\frac{\partial s}{\partial z}\right|_{z=0}=0 \tag{3.4.14}$$

$$-K_z\left.\frac{\partial s}{\partial z}\right|_{z=b}\cong S_y\left.\frac{\partial s}{\partial t}\right|_{z=b} \tag{3.4.15}$$

其中 b 初始的潜水面高度，从潜水含水层的底板开始算起。在这些边界条件中，式(3.4.14)表示含水层的底板为不透水边界，而式(3.4.15)表示在上边界垂直向下的渗流速率与潜水面下降引起的释水强度相等。

利用 Laplace 变换和 Hankel 变换，Neuman 得到了上述问题的解析解。这个解析解可以表示为以下符号形式

$$s(r,z,t)=\frac{Q}{4\pi T}W(u_e,\sigma,\beta,z_D) \tag{3.4.16}$$

其中

$$u_e=\frac{r^2S}{4Tt}\text{，}\ \sigma=\frac{S_sb}{S_y}\text{，}\ \beta=\left(\frac{K_z}{K_r}\right)\left(\frac{r}{b}\right)^2\text{，}\ z_D=\frac{z}{b} \tag{3.4.17}$$

Neuman 潜水井流模型得到的降深曲线也有类似 Boulton 模型的三个阶段。

为了与平面二维流模型进行比较，Neuman 给出了径向距离为 r 的完整观测孔中降深的表达式

$$s(r,t)=\frac{1}{b}\int_0^b s(r,z,t)dz \tag{3.4.18}$$

因为潜水面通常只能通过观测孔观察到，所以可以利用式(3.4.16)和(3.4.18)得到观测潜水面的降深公式

$$s(r,t)=\frac{Q}{4\pi T}W(u_e,\sigma,\beta) \tag{3.4.19}$$

其中 W(u_e, σ, β)为 Neuman 潜水井流模型的井函数。然而，必须注意的是这样给出的潜水面降深总是大于 $z=b$ 处的降深，也不意味着就是真正的潜水面降深。Neuman 认为 $z=b$ 处的水头降深才代表了潜水面的降深，它总是落后于 $z=b$ 以下部位的水头降深，表现出一种滞后性。Neuman (1979) 还根据降深曲线的相似性推导出 Boulton 滞后指数α的近似表达式为

$$\alpha=\frac{K_z}{S_yb}\left[3.063-0.567\lg\left(\frac{K_zr^2}{K_rb^2}\right)\right] \tag{3.4.20}$$

这说明α 并不是常数，而是随着径向距离而减小。

第五节 多含水层系统的非稳定井流

多个含水层之间将发生越流，组成越流系统。在抽水井或注水井的作用下，越流系统可分为三个大类(陈崇希等，1999)：① 第一类越流系统：弱透水层不因变形而释放或吸收水量，与被抽(注)含水层相邻的含水层水头保持不变；②第二类越流系统：弱透水层因变形而释放或吸收水量，而与被抽(注)含水层相邻的含水层水头保持不变；③第三类越流系统：弱透水层释水和相邻含水层水头变化都同时发生。其中，第二类和第三类越流系统的解析解都相当复杂，实用性受到限制，下面仅给出第一类越流系统的解析模型。

一、 第一类越流系统的定流量竖井

Hantush 和 Jacob(1955)给出了这种条件下单井的非稳定流解析解。在不稳定径向流中引入越流补给项，含水层地下水流的控制方程为

$$T\left(\frac{\partial^2H}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right)+L_c(H_0-H)=S\frac{\partial H}{\partial t} \tag{3.5.1}$$

其中越流系数 L_c 已经在式(3.2.13)中定义。写成降深方程为

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}-\frac{s}{B^2}=\frac{S}{T}\frac{\partial s}{\partial t} \tag{3.5.2}$$

其中越流因子 B 已经在前面定义。边界条件为

$$s=0,\ r=\infty;\ \lim_{r\to 0}2\pi rT\frac{\partial s}{\partial r}=-Q \tag{3.5.3}$$

初始条件为

$$s(r)=0,\ t=0 \tag{3.5.4}$$

利用 Hankel 变换，上述定解问题的解为

$$s(r,t)=\frac{Q}{4\pi T}\int_u^\infty \frac{1}{y}\exp[-(y+\frac{r^2}{4B^2 y}]dy=\frac{Q}{4\pi T}W(u,\frac{r}{B}) \tag{3.5.5}$$

其中

$$u=\frac{r^2 S}{4Tt} \tag{3.5.6}$$

随着时间的延长，降深会趋于一个固定值，含水层地下水运动接近于稳定流，其降深分布可以用式(3.2.19)求出。

根据式(3.5.5)可以确定降深的变化速率

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{Q}{4\pi T}\frac{1}{t}\exp\left[-(u+\frac{r^2}{4B^2 u})\right] \tag{3.5.7}$$

如果降深的发展过程绘制成 s-ln$t$ 曲线，需要得到时间对数速率

$$\frac{\partial s}{\partial(\ln t)}=\frac{Q}{4\pi T}\exp\left[-(u+\frac{r^2}{4B^2 u})\right] \tag{3.5.8}$$

利用这个性质可以根据实测数据反求参数，因为 s-ln$t$ 曲线存在一个直线段，并有拐点，拐点(s_i, t_i)根据下式确定

$$\frac{\partial^2 s}{\partial(\ln t)^2}=\frac{Q}{4\pi T}\left(u-\frac{Tt}{B^2 S}\right)\exp\left[-(u+\frac{r^2}{4B^2 u})\right]=0 \tag{3.5.9}$$

这样可以得到拐点处的时间与降深为

$$t_i=\frac{BrS}{2T},\quad u_i=\frac{r}{2B}$$

$$s_i=\frac{1}{2}s_{\max}=\frac{Q}{4\pi T}K_0\left(\frac{r}{B}\right)$$

而直线段的斜率由拐点坐标代入式(3.5.8)得到

$$m_i=\left.\frac{\partial s}{\partial(\ln t)}\right|_{t=t_i}=\frac{Q}{4\pi T}\exp\left(-\frac{r}{B}\right)=\frac{s_{\max}}{2K_0(r/B)}\exp\left(-\frac{r}{B}\right) \tag{3.5.10}$$

在已知(m_i, $s_{\max}$)的情况下，可以根据上式求出 r/B，从而确定参数 B。然后利用($s_{\max}$, Q)求出参数 T，再由(t_i, r)求出参数 S。

二、 第一类越流系统的定降深竖井

Hantush (1959)研究了这种条件下单井的非稳定流解析解。其控制方程仍然为式(3.5.2)，而边界条件变为

$$s=0\,,\ \ r=\infty\,;\ \ s=s_w\,,\ \ r=r_w \tag{3.5.11}$$

井流量仍然可以通过下式计算

$$Q=-2\pi r_w T\left.\frac{\partial s}{\partial r}\right|_{r=r_w}$$

其解析解为

$$Q(t)=2\pi T s_w G(t_D,\frac{r_w}{B}) \tag{3.5.12}$$

其中 $G(t_D, r_w/B)$是井流量函数，有

$$t_D=\frac{T}{r_w^2 S}t \tag{3.5.13}$$

$$G(t_D,\frac{r_w}{B})=\frac{r_w}{B}\frac{K_1(r_w/B)}{K_0(r_w/B)}+\frac{4}{\pi^2}\exp\left[-t_D\left(\frac{r_w}{B}\right)^2\right]\int_0^\infty\frac{x\exp[-t_D x^2]}{J_0^2(x)+Y_0^2(x)}\frac{dx}{x^2+(r_w/B)^2} \tag{3.5.14}$$

含水层的降深可以求解得到

$$s=s_w W(t_D,r_D,\frac{r_w}{B}) \tag{3.5.15}$$

其中 $r_D=r/r_w$，而井函数为

$$W(t_D,r_D,\frac{r_w}{B})=\frac{K_0(r/B)}{K_0(r_w/B)}$$

$$+\frac{2}{\pi}\exp\left[-t_D\left(\frac{r_w}{B}\right)^2\right]\int_0^\infty\left[J_0(\frac{xr_w}{B})Y_0(x)-Y_0(\frac{xr_w}{B})J_0(x)\right]\frac{x\exp[-t_D x^2]}{J_0^2(x)+Y_0^2(x)}\frac{dx}{x^2+(r_w/B)^2} \tag{3.5.16}$$

当时间很长，降深趋于稳定（图 3.8），当接近稳定流时，可以使用有越流承压含水层的稳定流公式(3.2.18)。

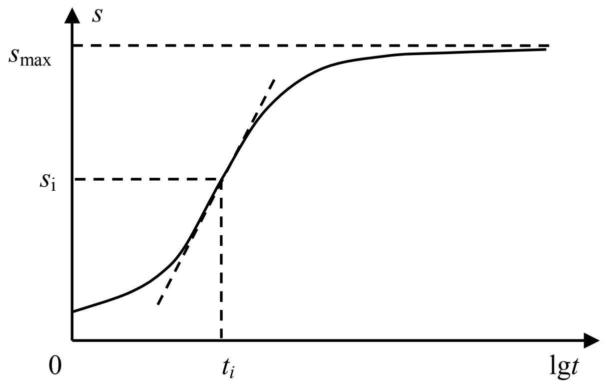


图 3.8 第一类越流系统定流量井流的降深曲线特征

第六节　复杂条件井流分析

前述含水层-井孔地下水流模型都是在非常简化的假设条件下获得的，往往不符合含水层的自然状态或井孔的实际情况，可能无法直接使用。但是，这些理想模型仍然是分析的基础，可以根据复杂条件的特征做一些修正，从而达到更加实用的目的。

一、 边界附近的井流

如果井孔驱动的地下水流受到含水层边界的影响，需要联合运用镜像法和叠加原理进行分析。镜像法就是根据边界的性质，在实际井孔对称于边界的另一侧形成虚拟井，而含水层等效处理为无限延伸。然后，把真实井和虚拟井对水流的作用叠加在一起形成解析解。

虚拟井的产生有一定的规则。当一个抽水井在一条直线隔水边界附近时，虚拟井为对称于边界一个相同流量的抽水井。如果这个边界是定水头边界，则虚拟井的性质与真实井相反，流量为真实井流量的负值。如果真实井孔附近同时存在两条直线边界，则通过一条边界产生的虚拟井，需要以另一条边界为参考产生新的虚拟井，可能产生无数个这样的虚拟井。

设承压含水层参数为 T、S，某抽水井在一条直线定水头边界（如切穿含水层的河流）附近以流量 Q 抽水，观测孔与抽水井的距离为 r_1，与虚拟井的距离为 r_2，则形成稳定流的降深解析解为真实抽水井和虚拟注水井的叠加结果

$$s = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{r_2}{r_1} \tag{3.6.1}$$

而非稳定流的叠加结果为

$$s = \frac{Q}{4\pi T}\left[W\left(\frac{S}{T}\frac{r_1^2}{4t}\right) - W\left(\frac{S}{T}\frac{r_2^2}{4t}\right)\right] \tag{3.6.2}$$

当时间足够长时，根据 Theis 井函数的近似式，上式可以还原为稳定流公式。

一种典型的情况是带状承压含水层中的井流问题（图 3.9）。以真实井孔的平面位置为原点，它与左侧和右侧直线边界的距离分别为 d_1 和 d_2，而且左侧虚拟井点的坐标用(x_{1i}, y_{1i}=0)表示、右

侧虚拟井点的坐标用(x_{2i}, y_{2i}=0)表示，则有

$$i = 2k - 1, x_{1i} = -[2k(d_1 + d_2) + 2d_1], \quad k=1, 2, \ldots \tag{3.6.3}$$

$$i = 2k, x_{1i} = -[2k(d_1 + d_2)], \quad k=1, 2, \ldots \tag{3.6.4}$$

$$i = 2k - 1, x_{2i} = 2k(d_1 + d_2) - 2d_1, \quad k=1, 2, \ldots \tag{3.6.5}$$

$$i = 2k, x_{2i} = 2k(d_1 + d_2), \quad k=1, 2, \ldots \tag{3.6.6}$$

设真实井的流量为 Q，则对应虚拟井的流量 Q_{1i} 和 Q_{2i}，考虑以下三种情况

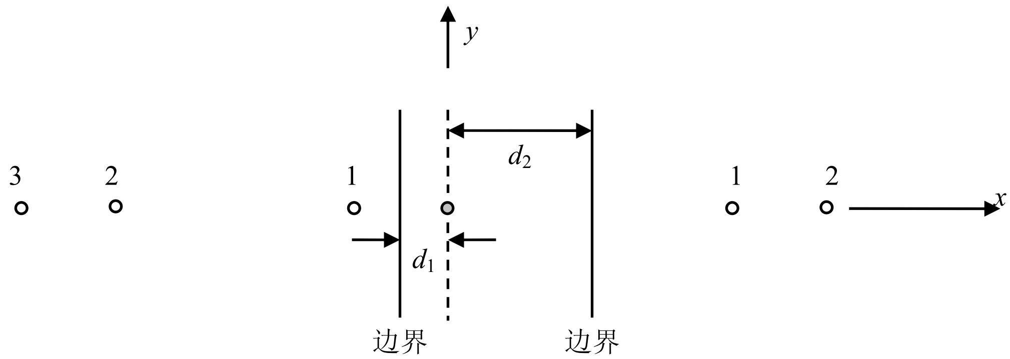


图 3.9　带状含水层镜像井点的分布

(1) ***两侧均为隔水边界***

所有虚拟井的性质都和真实井相同，有

$$Q_{1i} = Q_{2i} = Q, \quad i=1, 2, \ldots \tag{3.6.7}$$

(2) ***两侧均为定水头边界***

有些虚拟井的性质与真实井相同，有些则相反，取决于下式

$$Q_{1i} = Q_{2i} = (-1)^i Q, \quad i=1, 2, \ldots \tag{3.6.8}$$

(3) ***左侧为隔水边界，右侧为定水头边界***

有些虚拟井的性质与真实井相同，有些则相反，取决于下式

$$i = 2k - 1, Q_{1i} = (-1)^{k+1} Q, \quad k=1, 2, \ldots \tag{3.6.9}$$

$$i = 2k, Q_{1i} = -(-1)^{k+1} Q, \quad k=1, 2, \ldots \tag{3.6.10}$$

$$i = 2k - 1, Q_{2i} = -(-1)^{k+1} Q, \quad k=1, 2, \ldots \tag{3.6.11}$$

$$i = 2k, Q_{2i} = (-1)^{k+1} Q, \quad k=1, 2, \ldots \tag{3.6.12}$$

在确定了上述虚拟井的位置和流量之后，非稳定流的叠加结果为

$$s=\frac{Q}{4\pi T}W\left(\frac{S}{T}\frac{x^2+y^2}{4t}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Q_{1i}}{4\pi T}W\left(\frac{S}{T}\frac{(x-x_{1i})^2+y^2}{4t}\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Q_{2i}}{4\pi T}W\left(\frac{S}{T}\frac{(x-x_{2i})^2+y^2}{4t}\right) \tag{3.6.13}$$

在具体计算时，如果虚拟井与真实井的距离足够远，不影响计算需要达到的精度，则可以忽略。

二、 群井抽注水非稳定流

当局部地区存在少量抽水井或注水井时，可以简单的采用叠加原理进行求解。对于无限延伸的承压含水层，观测点的降深采用 Theis 公式的叠加结果

$$s=\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{4\pi T}W\left(\frac{S}{T}\frac{r_i^2}{4t_i}\right) \tag{3.6.14}$$

式中：N 为总井数；Q_i 为井 i 对应的流量，以抽水为正、注水为负；r_i 为观测点(x, y)与井 i 的距离，t_i 为从井 i 开始抽水算起的时间。对于第一类越流系统，降深的叠加解表示为

$$s=\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{4\pi T}W\left(\frac{S}{T}\frac{r_i^2}{4t_i},\frac{r_i}{B}\right) \tag{3.6.15}$$

承压含水层中的群井周围，只有在同时存在抽水井和注水井并且总抽水流量与总注水流量相同时，才能形成稳定流。第一类越流系统的群井抽注水流，不必满足总抽水流量与总注水流量相同，只要时间足够长就可以趋近于稳定状态。

这种简单叠加的方法只适用于少量井的情况，难以适应井孔分布十分密集、数量非常多的条件。对于井孔密集分布的群井抽注水问题，下面考虑两种情况进行分析：

(1) 井孔在无限大的面积范围内均匀分布，单井开采强度相同

这种条件下，每个井孔周围形成的流场特征都是相同的，因此可以按照对称性原理，截取井孔连线平分线所包围的单井控制区进行分析。为了简化，单井控制区假设为同面积的圆形区域，其半径为 R，圆周所对应的圆柱面为零通量面，等效为隔水边界。在承压含水层中，这个问题的数学模型为

$$T\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right)=S\frac{\partial s}{\partial t} \tag{3.6.16}$$

$$s(r,t=0)=0 \tag{3.6.17}$$

$$\partial s/\partial r\big|_{r=R}=0 \tag{3.6.18}$$

$$Q=-\lim_{r\to 0}\left(2\pi rT\frac{\partial s}{\partial r}\right) \tag{3.6.19}$$

其中式(3.6.18)所描述是单井控制区外侧的边界条件。运用 Laplace 变换求解该模型，得到解析解

$$s=\frac{Q}{4\pi T}W\left(r,R,\frac{Tt}{R^2S}\right) \tag{3.6.20}$$

当时间足够长时，井函数可以近似表示为

$$W\left(r,R,\frac{Tt}{R^2S}\right)=\frac{4T}{S}\frac{t}{R^2}+\left(\frac{r^2}{R^2}-\frac{3}{2}+2\ln\frac{R}{r}\right) \tag{3.6.21}$$

降深随半径的变化率为

$$\frac{\partial s}{\partial r}=\frac{Q}{2\pi T}\left(\frac{r}{R^2}-\frac{1}{r}\right) \tag{3.6.22}$$

上式表明抽水时间足够长后，井孔周围的水力梯度将保持不变，为拟稳定流状态。

(2) 井孔在圆形开采区内均匀分布，单井开采强度相同

设开采区的半径为 R，总开采量为 Q，则分摊在面积上的平均开采强度为$\varepsilon=Q/\pi R^2$，地下水运动的控制方程为

$$T\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right)-f(r)\varepsilon=S\frac{\partial s}{\partial t} \tag{3.6.23}$$

其中 $f(r)$是源汇项函数，在此表示为

$$f(r)=1, r<R;\quad f(r)=0, r\geq R \tag{3.6.24}$$

初始条件和边界条件为

$$s(r,t=0)=0 \tag{3.6.25}$$

$$s(r\to\infty,t)=0 \tag{3.6.26}$$

$$\partial s/\partial r\big|_{r\to 0}=0 \tag{3.6.27}$$

张蔚榛(1983)运用 Laplace 变换求解上述数学模型得到

$$s(r,t)=\frac{Q}{4\pi T}W_c(t_D,r_D),\quad t_D=\frac{T}{S}\frac{t}{R^2},\quad r_D=\frac{r}{R} \tag{3.6.28}$$

其中井函数为

$$W_c(t_D,r_D)=4\int_0^\infty[1-\exp(-\beta^2t_D)]J_1(\beta)J_0(\beta r_D)\frac{d\beta}{\beta^2} \tag{3.6.29}$$

三、 二元结构含水层中的井流

二元结构含水层，是一种冲积平原区常见的含水层组合形态，其下部为一个强透水的承压含水层，上部为一个弱透水的潜水含水层。当抽水井从下部含水层抽水时，同时可以引起强透水层的水头与弱透水层的潜水面发生变化（图 3.10）。张蔚榛(1983)对这种含水层的井流问题进行了分析，假设条件为：① 上部含水层的水位降深 s_1 远小于其饱和厚度 m_1，设其渗透系数为 K_1，则 K_1/m_1 保持不变；②上部含水层的水流近似为垂直方向，下部含水层的水头近似为水平方向；③抽水井相对下部含水层为完整井，与上部含水层没有直接水力联系。根据这些假设，采用类似越流

系统的概念，建立了上下含水层的水流控制方程

$$-\frac{K_1}{m_1}(s_1-s_2)=\mu_1\frac{\partial s_1}{\partial t} \tag{3.6.30}$$

$$T_2\left(\frac{\partial^2 s_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s_2}{\partial r}\right)+\frac{K_1}{m_1}(s_1-s_2)=S_2\frac{\partial s_2}{\partial t} \tag{3.6.31}$$

式中：s_1、s_2 分别为上下含水层的水头降深；K_1、m_1、μ_1 分别为上部含水层的渗透系数、厚度和给水度；T_2、S_2 分别为下部含水层的导水系数和储水系数。

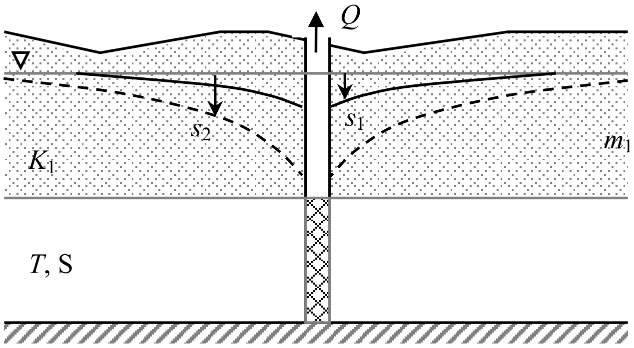


图 3.10　二元结构含水层井流模型示意图

对上部含水层的控制方程采用 Laplace 变换，得到

$$p\bar{s}_1=-\alpha(\bar{s}_1-\bar{s}_2) \tag{3.6.32}$$

其中

$$\bar{s}_1=\int_0^\infty s_1 e^{-pt}dt\ ,\ \ \bar{s}_2=\int_0^\infty s_2 e^{-pt}dt\ ,\ \ \alpha=\frac{K_1}{m_1\mu_1} \tag{3.6.33}$$

求解上式得到

$$\bar{s}_1=\frac{\alpha}{p+\alpha}\bar{s}_2 \tag{3.6.34}$$

并利用 Laplace 逆变换，有

$$\frac{\partial s_1}{\partial t}=\alpha\int_0^t\frac{\partial s_2}{\partial t}\exp[-\alpha(t-\tau)]d\tau \tag{3.6.35}$$

代入控制方程并整理得到

$$T_2\left(\frac{\partial^2 s_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s_2}{\partial r}\right)=S_2\frac{\partial s_2}{\partial t}+\alpha\mu_1\int_0^t\frac{\partial s_2}{\partial t}\exp[-\alpha(t-\tau)]d\tau \tag{3.6.36}$$

上式与潜水含水层 Boulton 井流模型的控制方程一致，采用类似的初始条件和边界条件，可以得到以下解析解

$$s(r,t)=\frac{Q}{4\pi T}W\left(u_e,u_d,\frac{r}{B}\right) \tag{3.6.37}$$

其中

$$u_e = \frac{r^2 S_2}{4T_2 t}，\ u_d = \frac{r^2 \mu_1}{4T_2 t}，\ B = \sqrt{\frac{T_2}{\alpha \mu_1}} \tag{3.6.38}$$

而 $W(u_e, u_d, r/B)$为 Boulton 井函数。

四、 盖层弯曲效应

当承压含水层中地下水的压力由于开采而下降时，含水层的厚度将减小，从而引起顶板下陷，由于测压水头面呈现漏斗状，顶板的下陷不是整体均匀的而是弯曲的。这种现象最早由陈崇希等(1979)提到。承压含水层顶板的弯曲将形成向上的推力，抵消上部含水层的部分重量，从而引起含水层承受荷载的降低并作用于地下水流（图 3.11）。我们把这种现象称为含水层井流-盖层弯曲效应(王旭升等, 2002; 王旭升等, 2003; Wang et al., 2004)。

在含水层井流-盖层弯曲效应的解析理论中，承压含水层的储水系数分为两个部分，表示为

$$S = \mu_w + \mu_m \tag{3.6.39}$$

式中：μ_w 为地下水膨胀给水度；μ_m 为含水层骨架压缩给水度，分别决定于

$$\mu_w = \gamma_w n \beta m，\quad \mu_m = \gamma_w m \alpha \tag{3.6.40}$$

式中：γ_w 为地下水的容重；n 是含水层介质的孔隙度；m 是含水层的厚度；α为含水层骨架的压缩系数，β为地下水的压缩系数。

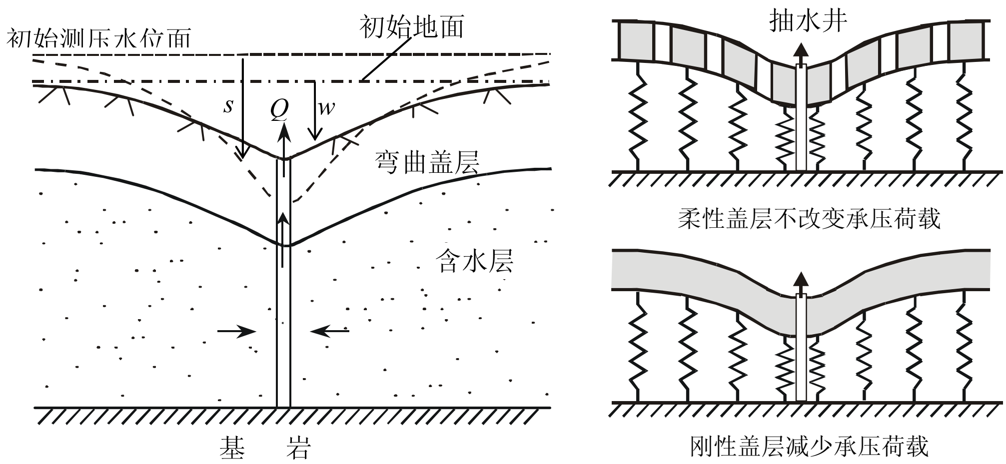


图 3.11 承压含水层盖层弯曲效应示意图

根据有效应力原理，含水层介质总应力变化$\Delta\sigma$与水头降深 s 和盖层弯曲挠度 w 之间的关系为

$$\Delta\sigma = \frac{\gamma_w}{\mu_w} w - \gamma_w s \tag{3.6.41}$$

引入弹性力学中的薄板弯曲理论，盖层弯曲的控制方程为

$$D\nabla^4 w = -\Delta\sigma \tag{3.6.42}$$

式中：D 为该盖层的挠曲刚度。式(3.6.41)、 (3.6.42)与地下水流方程结合可以建立承压含水层井流-盖层弯曲效应的数学模型，考虑完全封闭条件和存在越流两种情况。

(1) 无越流承压含水层

单井开采条件下，无越流承压含水层井流-盖层弯曲效应的数学模型为

$$D(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r})(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r})w + \frac{\gamma_w}{\mu_m}w = \gamma_w s \tag{3.6.43}$$

$$T(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}) = \frac{\partial w}{\partial t} + \mu_w\frac{\partial s}{\partial t} + q(r,t) \tag{3.6.44}$$

$$\lim_{r_w\to 0}\int_0^{r_w} 2\pi r q(r,t)dr = -Q,\ r \le r_w \tag{3.6.45}$$

$$q(r,t) = 0,\ r > r_w,\quad t > 0 \tag{3.6.46}$$

$$\partial w/\partial r = 0,\quad r = 0,\quad t > 0 \tag{3.6.47}$$

$$s(\infty,t) = 0, w(\infty,t) = 0, t > 0 \tag{3.6.48}$$

$$s(r,0) = 0,\ w(r,0) = 0,\quad r > 0 \tag{3.6.49}$$

式中：$q(r,\ t)$是源汇分布函数；Q 是井的抽水流量。式(3.6.43)为盖层弯曲的控制方程，式(3.6.44)为地下水流的控制方程，式(3.6.45)和(3.6.46)给出了单井抽水条件下的源汇分布函数特征，式(3.6.47)、(3.6.48)均为边界条件，式(3.6.49)为初始条件。

利用 Hankel 变换可以得到上述问题的解析解为（王旭升等, 2003; Wang et al., 2004）

$$w(r,t) = \frac{Q}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1-e^{-\lambda(\beta)t}}{a\beta(1+c\beta^4)}(1-\frac{\mu_w}{S})J_0(\beta r)d\beta \tag{3.6.50}$$

$$s(r,t) = \frac{Q}{2\pi T}\int_0^\infty \frac{1-e^{-\lambda(\beta)t}}{\beta}J_0(\beta r)d\beta \tag{3.6.51}$$

其中

$$\lambda(\beta) = a\beta^2\frac{1+c\beta^4}{1+(\mu_w c\beta^4/S)} \tag{3.6.52}$$

$$a=T/S,\ c=\mu_m D/\gamma_w \tag{3.6.53}$$

降深的解析解可以用井函数 M 表示为无量纲的形式：

$$s_D = \frac{s}{(Q/4\pi T)} = M(t_D, r_D, \phi) \tag{3.6.54}$$

其中

$$t_D=\frac{4at}{r^2},r_D=\frac{r^4}{c},\phi=\frac{\mu_w}{S} \tag{3.6.55}$$

$$M(t_D,r_D,\phi)=\int_0^{\infty}\left[1-\exp\left(-\frac{x^2}{4}t_D\frac{r_D+x^4}{r_D+\phi x^4}\right)\right]\frac{J_0(x)}{x}dx \tag{3.6.56}$$

(2) 第一类越流系统

单井开采条件下，第一类越流系统承压含水层中的水流控制方程为

$$T(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r})-Ls=\frac{\partial w}{\partial t}+\mu_w\frac{\partial s}{\partial t}+q(r,t) \tag{3.6.57}$$

式中：L 为前面已经定义的越流系数。盖层弯曲方程与式(3.6.43)相同、而源汇函数、边界条件、初始条件与式(3.6.45)~ (3.6.49)相同。降深的解析解可以用井函数 M 表示为（王旭升等, 2003）：

$$s=\frac{Q}{4\pi T}M(t_D,r_D,\phi,\frac{r}{B}) \tag{3.6.58}$$

式中：t_D, r_D, ϕ的定义同前，另有

$$B=\sqrt{\frac{T}{L}} \tag{3.6.59}$$

$$M(t_D,r_D,\phi,\frac{r}{B})=\int_0^{\infty}\left[1-\exp\left(\frac{x^2+r^2/B^2}{4}t_D\frac{r_D+x^4}{r_D+\phi x^4}\right)\right]\frac{xJ_0(x)}{x^2+r^2/B^2}dx \tag{3.6.60}$$

其降深曲线如图 3.12 所示。含水层井流-盖层弯曲效应可以在抽水试验的早期有一定反映。

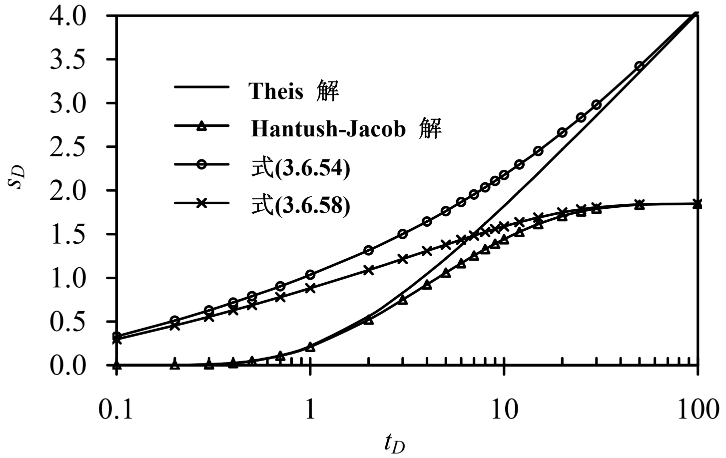


图 3.12　第一类越流系统承压含水层单井抽水的 s_D~t_D 曲线

(r_D=0. 1, ϕ=0, r/B=0. 5)

五、 井筒储集效应

上述理想条件下的含水层-井孔地下水流模型，均假设井孔的半径为无穷小，不考虑井孔内水量的储存和释放所产生的影响。半径为 r_w 的井孔内水位下降 s_w，则井筒内释放的水量为

$$V_w = \pi r_w^2 s_w \tag{3.6.61}$$

这部分水量在某些情况下对地下水流的影响是不能忽略的，即产生井筒储集效应。在瞬时抽/注水试验中，井筒储集效应是一个重要的因素。

瞬时抽/注水试验（如美国流行的 Slug Test）是把体积为 V 的水突然注入井中，使井中水位突然上升一个高度，然后观测井中水位的恢复过程。Cooper 等(1967)建立了承压含水层中完整井瞬时注水问题的解析理论，数学模型可以写成以下方程组

$$T\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right)=S\frac{\partial s}{\partial t}, \quad r>r_w \tag{3.6.62}$$

$$s(r>r_w, t=0)=0 \tag{3.6.63}$$

$$H_w(t=0)=H_0=V/(\pi r_c^2) \tag{3.6.64}$$

$$s(r=r_w,t)=-H_w(t);\ \ s(r\to\infty,t)=0 \tag{3.6.65}$$

$$2\pi r_w T\left.\frac{\partial s}{\partial r}\right|_{r=r_w}=-\pi r_c^2\frac{\partial H_w}{\partial t} \tag{3.6.66}$$

式中：r_w 和 r_c 分别是井筒滤管（与含水层连通）和套管（井水位升降段）的半径，$H_w(t)$ 是井筒内的水位（以静态水位为基准）。在上述数学模型中，式(3.6.65)反映的是地下水流的边界条件，式(3.6.66)反映的是井筒水位下降过程与地下水流过程之间的耦合关系。Cooper 等(1967)得到的井中水位解析解为

$$H_w=H_0\frac{8\alpha}{\pi}\int_0^\infty \exp(-\beta u^2/\alpha])\frac{du}{uf(u,\alpha)} \tag{3.6.67}$$

其中

$$\alpha=\frac{r_w^2 S}{r_c^2}, \quad \beta=\frac{Tt}{r_c^2} \tag{3.6.68}$$

$$f(u,\alpha)=[uJ_0(u)-2\alpha J_1(u)]^2+[uY_0(u)-2\alpha Y_1(u)]^2 \tag{3.6.69}$$

式中：Y_0 和 Y_1 分别为零阶和一阶第二类 Bessel 函数。

六、 表皮效应

井孔在施工和运行过程中容易改变井周附近含水层的渗透性，被称为涂抹效应(smear effect)或表皮效应(skin effect)。目前简化的处理方式是考虑在实际井径 r_w 之外，有一个半径为 r_s 的圆柱形区域包围的涂抹区，其渗透系数为 K_s，定义一个称为表皮系数的参数

$$C_s = \left(\frac{K}{K_s} - 1\right)\ln\frac{r_s}{r_w} \tag{3.6.70}$$

其中 K 为未扰动含水层介质的渗透系数。对于流量为 Q 抽水井，涂抹区的存在将产生一个附加降深

$$\Delta s = s_w - s_a = \frac{Q}{2\pi T}C_s \tag{3.6.71}$$

式中：s_w 为考虑涂抹效应后的实际降深；s_a 为不考虑涂抹效应的降深值。

可以用来代替表皮系数的参数是井孔的有效半径

$$r_e = r_w \exp(-C_s) \tag{3.6.72}$$

在不考虑涂抹效应的理论模型中，把井径 r_{w} 改成 r_{e}，则解析解的形式可以保持不变而涂抹效应得到考虑。

七、 非完整竖井

上述含水层-井孔水流模型都假定竖井的过滤器段完全穿透所要分析的含水层，这种井是完整井（图 3.13）。然而，实际工程中存在大量的非完整井，即井孔的过滤器段长度小于目标含水层的厚度，这时井孔附近地下水不仅发生水平流动，而且存在强烈的垂向流。完整井模型的结果不能直接用于非完整井。但是实验观测表明，当径向距离远大于含水层的厚度时，地下水以水平流为主，基本符合完整井的条件，只有在径向距离小于 2 倍的含水层厚度时，垂向流才达到可观程度。因此，只有在研究井周附近的地下水运动特征时，才需要严格考虑非完整井的影响。

考虑第一类越流系统承压含水层中的单个非完整井，滤管段的长度为 L，滤管顶部与含水层顶板的距离为 d，而含水层厚度为 m，其他条件与前述模型相同。Hantush(1961a, b)在建立模型时假定越流补给的水量平均分配到含水层厚度上，而承压含水层的顶板仍然视为隔水边界，得到如下形式的三维数学模型

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - \frac{s}{B^2} = \frac{S}{T}\frac{\partial s}{\partial t} \tag{3.6.73}$$

$$s(r, z, t = 0) = 0 \tag{3.6.74}$$

$$\partial s / \partial z\big|_{z=0} = 0\text{；}\ \partial s / \partial z\big|_{z=m} = 0 \tag{3.6.75}$$

$$s(r \to \infty, z, t) = 0 \tag{3.6.76}$$

$$\lim_{r\to 0}\left(2\pi KLr\frac{\partial s}{\partial r}\right)=\begin{cases}0, & 0<z<d, L+d<z<m \\ -Q, & d<z<L+d\end{cases} \tag{3.6.77}$$

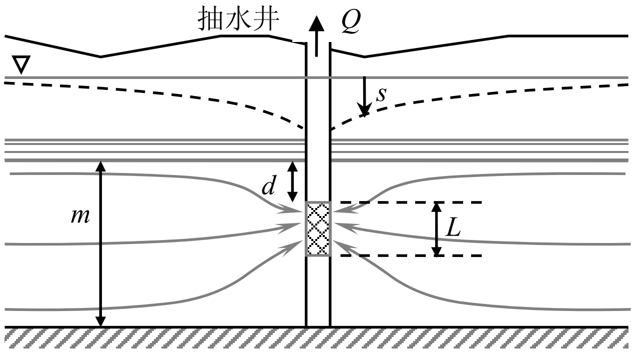


图 3.13　非完整井附近的地下水流

该数学模型的解比较复杂。当滤管的顶部直接与含水层顶板接触时，有 d=0，这时含水层平均降深的解析解可以简化为

$$s(r,t)=\frac{Q}{4\pi T}\left[W(u,r/B)+F\left(u,\frac{L}{m},\frac{r}{m},\frac{r}{B}\right)\right] \tag{3.6.78}$$

其中

$$F\left(u,\frac{L}{m},\frac{r}{m},\frac{r}{B}\right)=\frac{2m^2}{\pi^2L^2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{\sin^2(i\pi L/m)}{i^2}W(u,r/B')\right] \tag{3.6.79}$$

$$u=\frac{r^2S}{4Tt},\quad B'=B/\sqrt{(i\pi B/m)^2+1} \tag{3.6.80}$$

为了获得稳定流的解析解，令 $t\to\infty$，有 $u\to 0$，则(3.6.78)变为

$$s(r,t)=\frac{Q}{2\pi T}\left[K_0\left(\frac{r}{B}\right)+F\left(\frac{L}{m},\frac{r}{m},\frac{r}{B}\right)\right] \tag{3.6.81}$$

其中

$$F\left(\frac{L}{m},\frac{r}{m},\frac{r}{B}\right)=\frac{2m^2}{\pi^2L^2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{\sin^2(i\pi L/m)}{i^2}K_0\left(\frac{r}{B'}\right)\right] \tag{3.6.82}$$

从式(3.6.78)和(3.6.81)可以看出，非完整井形成的降深，由完整井模型降深和附加降深两个部分组成。在含水层各向同性条件下，Hantush(1961a, b)指出，当 r >1.5m 时，附加降深基本上可以忽略。

八、 各向异性含水层

多孔介质的渗透性具有随方向变化的特点，因此，只有均质各向同性的含水层，才可以用单一渗透系数作为参数描述其渗透性。在平面上延展的含水层，如果水平渗透系数随方向明显变化，则建立在各向同性基础上的含水层-井孔水流模型需要进行修改。

解决各向异性问题的一种简易方法是进行坐标变换(陈崇希等, 1999)。设渗透性的主轴方向分别为 x、y 坐标方向，对应的渗透系数为 K_x、K_y，导水系数为 T_x、T_y。为了对径向流进行修正，可作如下的坐标变换

$$\bar{r}^2 = \frac{x^2}{\sqrt{K_x / K_y}} + \frac{y^2}{\sqrt{K_y / K_x}} = \frac{x^2}{\sqrt{T_x / T_y}} + \frac{y^2}{\sqrt{T_y / T_x}} \tag{3.6.83}$$

而渗透性参数也进行如下的变换

$$\bar{K}_h = \sqrt{K_x K_y}\,; \quad \bar{T}_h = \sqrt{T_x T_y} \tag{3.6.84}$$

这样变换之后，含水层-井孔水流模型仍然可以采用各向同性条件下的形式。例如，均质各向异性第一类越流系统单井抽水的降深解可以表示为

$$s(\bar{r},t) = \frac{Q}{4\pi\bar{T}} W\left(\frac{\bar{r}^2 S}{4\bar{T}t}, \frac{\bar{r}}{B}\right) \tag{3.6.85}$$

其中的越流参数 B 是用变换后的导水系数计算的。

为了解均质各向异性含水层的降深在平面上的分布特点，我们不妨取一个固定的时刻 t 来分析，取固定降深 s_t 绘制一条降深等值线（图 3.14），则有

$$s_t = F_t(\bar{r}^2) \tag{3.6.86}$$

其中 F_t 是各向同性条件下得到的降深分布函数，取其逆函数可以得到

$$\bar{r}^2 = F_t^{-1}(s_t) \tag{3.6.87}$$

把变换式(3.6.83)代入上式得到等降深线的平面曲线方程

$$\frac{x^2}{\sqrt{T_x / T_y}} + \frac{y^2}{\sqrt{T_y / T_x}} = F_t^{-1}(s_t) \tag{3.6.88}$$

它可以转化为如下形式的标准椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.6.89}$$

设 $T_x > T_y$，则等降深线长轴（对应水力梯度最小的方向, x 轴）和短轴（对应水力梯度最大的方向, y 轴）的比值为

$$a / b = \sqrt{T_x / T_y} \tag{3.6.90}$$

该比值反映了不同方向渗透性大小的差异程度。

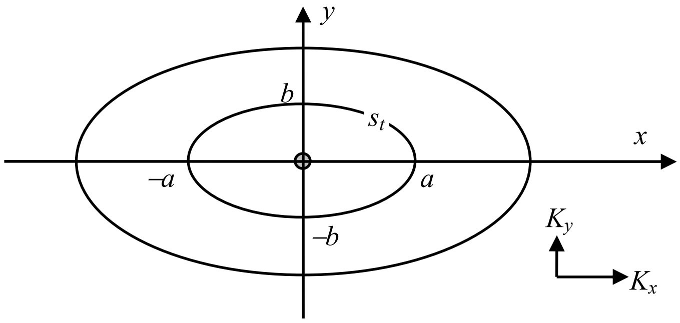


图 3.14　各向异性含水层的降深分布特征

九、 井管中水流的阻力

在前述含水层-井孔水流模型中，抽水井、注水井或自流井的水头被假定为只有一个数值，即等于井孔中的水位。实际上，井孔中的水位和井孔中的水头不是完全相同的概念。井孔中的水位指开启型井孔自由水面的位置，而井孔的水头按照管道水力学的规律是随深度变化的。当地下水流经过滤管进入抽水井的井孔之后，将沿着井孔向安装在某个高度的吸泵流动，在流动过程中承受井孔管壁的摩擦力而损失水头。

水流通过井壁和井管形成的水头损失，根据陈雨孙(1977)的归纳，包括五个部分：① 水流经过滤管外部包裹的缠丝缝隙发生的水头损失；②水流经过滤管壁的圆孔发生的水头损失； ③ 水流从含水层内近水平方向转变为竖井内近垂直方向，流向偏转将造成水头损失；④沿滤管不断有水流加入井管，导致流量和流速增加而引起水头损失；⑤水流与井孔壁的摩擦造成沿程水头损失以及井管直径变化造成的局部水头损失。所有这些发生在井管内的水头损失总和被简称为井损。对井损的分析必须利用管道水力学的理论。井管内水流与含水层水流的重要区别体现在流态上，含水层水流一般处于层流状态，满足达西定律，但是井管内水流往往处于紊流状态，水头损失不再简单的与流量成正比。

前两种水头损失可以统一考虑为井壁水头损失Δh_b，用孔口出流的经验关系式表示，即(陈雨孙, 1977)

$$q=\frac{dQ_z}{dz}=2\pi r_w A_p C\sqrt{2g\Delta h_b} \tag{3.6.91}$$

式中：q 为滤管单位长度上的进水流量; Q_z 为自滤管底部算起的高度 z 处的累积井孔流量；r_w 为滤管的半径；A_p 是管壁的孔隙率；C 是滤管流量系数；g 为重力加速度。

而后三种水头损失发生在井管内，设井管内水头沿高度的函数为 $h_i(z)$，则管内水头损失可表示为(陈雨孙, 1977)

$$\frac{dh_i}{dz}=-\frac{1}{2\pi^2 r_w^3 A_p C g}\left(\frac{dQ_z}{dz}\right)^2-\frac{2Q_z}{g\pi^2 r_w^4}\frac{dQ_z}{dz}-\frac{fQ_z^2}{4g\pi^2 r_w^5} \tag{3.6.92}$$

式中：f 为管内水流的阻力系数，在紊流阻力平方区为常数。式(3.6.92)中右侧三项分别对应的是水流偏转、加速流、管壁摩擦形成的水头损失。

陈雨孙(1977)对承压含水层采用带影响半径的完整井稳定流模型，结合井壁水头损失和管内水头损失公式，分析了水头沿滤管的分布规律，认为井壁水头损失和水流偏转引起的水头损失基本可以忽略，得到滤管内附加降深Δs_i随高度变化的函数

$$\Delta s_i(z) = s_i - s_0 = \frac{Q^2}{g\pi^2 r_w^4}\left[\frac{mf}{12r_w}\left(\frac{z}{m}\right)^3 + \left(\frac{z}{m}\right)^2 - \frac{mf}{48r_w} - \frac{1}{3}\right] \tag{3.6.93}$$

式中：s_i 和 s_0 分别为实际降深和不考虑井损的计算降深；m 为含水层的厚度；z 是从滤管底部算起的高度; Q 是总的抽水流量。在很多情况下，地下水经过滤管段之后，还要经过一个套管段才到达吸泵的抽水口，该套管段水头的摩擦损失Δs_c也需要考虑

$$\Delta s_c = \frac{m_c f_c}{4g\pi^2 r_c^5} Q^2 \tag{3.6.94}$$

其中：m_c 和 r_c 分别为套管段的长度和半径；f_c 为套管段的阻力系数。这样总的附加降深就可以表示为

$$\Delta s = \Delta s_i\big|_{z=m} + \Delta s_c = \frac{Q^2}{g\pi^2 r_w^4}\left[\frac{2}{3} + \frac{mf}{16r_w} + \frac{m_c f_c}{4r_c}\left(\frac{r_w}{r_c}\right)^4\right] \tag{3.6.95}$$

这说明整个井管内的水头损失与抽水流量的平方成正比，简单表示为

$$\Delta s = CQ^2 \tag{3.6.96}$$

式中：C 为井损系数。虽然井损系数往往被视为常数，实践经验表明它也可能随流量而发生变化，从而使附加降深与流量的关系偏离二次曲线。

十、 水平井

前述所有的含水层-井孔水流模型都只针对竖井，即井管的延伸方向与含水层平面展布方向垂直的井孔。在油田开采中，与含水层延伸方向平行的水平井经常被利用；含水层开采的辐射井技术也是利用水平井来汇集地下水。这种含水层-水平井的地下水流特征无法用对应竖井的水流模型来描述。

水平井的经典理论是在 20 世纪 80 年代发展起来的，借用了大量关于竖井的理论假设，充分应用了空间源汇函数的积分变换方法。Daviau et al(1985)假定水平井为均匀强度的汇线，在均质各向同性承压含水层中建立了水平井的数学模型并得到解析解。这一解析理论在油藏试井分析中得到推广并被发展到各向异性含水层等较复杂的条件(Goode et al., 1987; Daviau et al., 1988; 徐献芝等, 1996; 孔祥言, 1999)。如图 3.15，考虑一个厚度为 m 的水平无限延伸承压含水层，水平方向渗透系数为 $K_x=K_y=K_H$，铅直方向渗透系数为 $K_z=K_V$，储水率为 S_s，含水层中有一个长度为 $2L$ 的水平井以恒定的流量 Q 开采地下水。假设水平井为均匀线源，则单位长度上的开采强度 q 表示为

$$q = \frac{Q}{2L} \tag{3.6.97}$$

油藏水平井的压力降落解析解(孔祥言, 1999)可表示为以下降深的形式

$$s=\frac{q\sqrt{\pi a_H}}{2\pi K_H m\sqrt{K_H/K_V}}\int_0^t\frac{F(z)}{\sqrt{\tau}}\exp\left(-\frac{y^2}{4a_H\tau}\right)\left[erf\left(\frac{L+x}{\sqrt{4a_H\tau}}\right)+erf\left(\frac{L-x}{\sqrt{4a_H\tau}}\right)\right]d\tau \qquad (3.6.98)$$

其中：

$$a_H=K_H/S_s\,,\quad a_V=K_V/S_s \qquad (3.6.99)$$

$$F(z)=1+2\sum_{i=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{i^2\pi^2a_V\tau}{m^2K_H/K_V}\right)\cos(i\pi z_w/m)\cos(i\pi z/m) \qquad (3.6.100)$$

根据这个解析解，降深的发展曲线(图 3.15)基本上分为三个阶段：① 早期径向流阶段，地下水在铅直横断面上以径向流的方式向水平井流动，降深的变化特征类似于竖井模型，即 s-lg$t$ 曲线近似为直线；② 中期线性流阶段，含水层的顶底板限制了地下水在铅直方向的流动，地下水主要沿着含水层侧向展开的方向流动，降深近似与时间的平方根成线性关系；③ 后期拟径向流阶段，含水层的作用近似一个圆盘状的汇，地下水在水平方向发生大范围的近似径向流动。

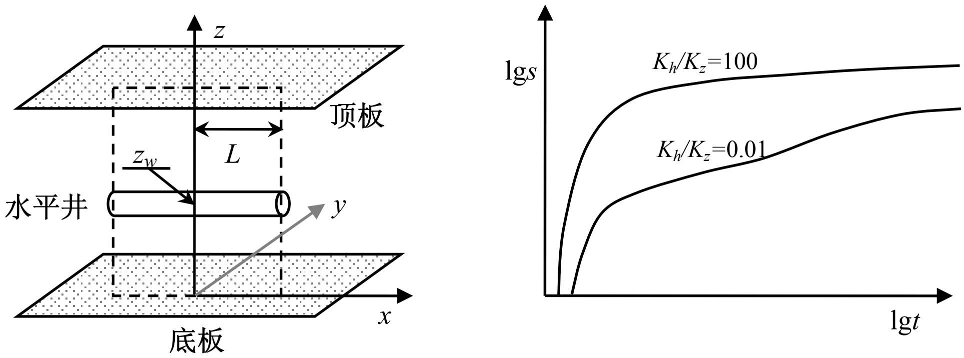


图 3.15　承压含水层水平井模型及降深特征曲线

等强度线汇假设只是对水平井的一种简化，没有考虑井孔内部水流的过程。实际上，水平井在长度方向上不仅水头存在变化，而且侧向汇水强度也发生变化。Tarshish (1992) 曾建立了一个顶部为定水头边界的含水层中的水平井模型，模型不仅考虑了井壁水头损失，而且利用动量方程计算了井孔内水流的水头损失，发现水平井的侧向汇水强度随延伸方向呈非线性变化，且变化幅度可达平均汇水强度的 2 倍以上。考虑各种复杂条件的水平井模型难以获得解析解，因此常通过数值模拟的方法进行分析。

第七节　井流试验及其解译

抽水试验(pumping test)是上百年来人们认识地下水运动规律、确定含水层参数的重要手段。除了抽水试验以外，注水试验、定降深放水试验等井流试验技术也得到广泛应用。已有的各种含水层-井孔地下水流模型，就是为了满足井流试验分析的需要不断提出来的，并得到井流试验的验证。在抽水试验工程中，一个或多个观测孔被布置在距抽水井（在行业内被称为主井）的一定距

离处，当抽水井以一定的流量抽取含水层的地下水时，观测孔及抽水井的水位（降深）得到记录。在对井流试验进行分析时，降深观测值作为资料，选取合适的含水层-井孔地下水流模型解释实测降深随时间或空间的变化，从而判断含水层的参数或边界性质。

在地下水非稳定流理论产生之前，人们一直用稳定流模型（裘布依模型）来解释井流试验结果，其中遇到的一个重要困难就是确定具有定水头的边界的位置，即影响半径 R 的取值。Theis(1935) 提出第一个非稳定井流公式之后，新的井流试验分析方法逐渐在美国发展起来，并最终向全世界推广，使稳定流模型仅仅作为特例加以使用。

一、 试验曲线的判别

虽然在进行井流试验之前，人们对含水层的性质和基本状态有所了解，但不一定能够和井流试验中的观测曲线相互协调。这就需要对试验得到的降深变化曲线进行类型和阶段的判别，从而确定采用什么样的计算模型和计算公式。对于承压含水层、有越流含水层和潜水含水层等不同类型的含水层，人们已经根据各种模型做出了单井试验降深变化的标准曲线。通过把一个井流试验资料与这些曲线进行对比，可以判断试验中发生的现象与哪个模型匹配。

井流试验的降深观测资料往往绘制成时间单对数曲线，即 s-lg$t$ 曲线。不同井流模型的结果十分鲜明的反映在它们的理论 s-lg t 曲线上。无越流承压含水层 Theis 井流模型得到的 s-lg$t$ 曲线在经历早期的变化之后明显趋向于一条直线，且早期曲线的斜率小于直线段的斜率。如果附近存在隔水边界，s-lg$t$ 曲线将出现斜率更大的第二直线段；如果附近存在定水头补给边界，s-lg$t$ 曲线将出现斜率更小的第二直线段。然而，遇到降深曲线偏离 Theis 曲线的情况，有时不能立即判断与哪种井流模型相对应。因为补给边界附近的承压含水层、有越流的含水层、潜水含水层，其降深曲线都存在斜率减小的“折平拐弯”段（图 3.16），必须借助更长序列的观测数据、多个观测孔的对比和区域水文地质条件的认识等多种手段来识别。

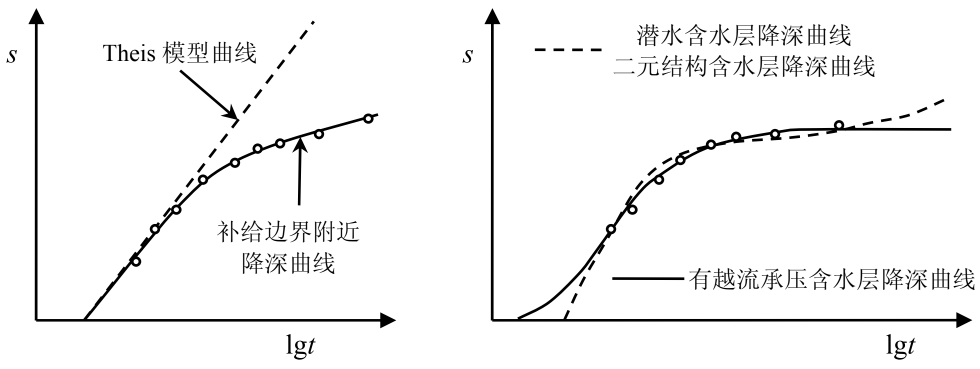


图 3.16 具有“折平拐弯”段的降深曲线

井流试验也会受到干扰。试验开始后早期（几分钟内）的降深，特别是抽水井本身的降深，由于泵的工作尚未达到稳定、观测匆忙等因素的影响，数据有一定的不确定性，往往不能作为计算的依据。然而，抽水井或观测孔早期的水压力或降深变化特征，又有可能反映了一些特定的问题，如盖层弯曲效应、井筒储集效应等，因此也有一定的价值。天然径流引起区域地下水位的持续下降和上升对时间较长的井流试验也有影响。地下水动力学已经证明，当天然径流处于稳定状

态时，从含水层-井孔地下水混合流场中扣除天然流场，即取相对降深，与采用静止初始水位得到的单纯井流降深结果是相同的。因此，当井流试验降深与天然动态水位发生叠加时，应从中消去天然动态再进行分析。在井流试验区间，附近地下水开采、地表水渗漏等事故可能显著干扰试验结果，这种现象应避免或在试验结果的分析中得到充分考虑。

二、 标准曲线配比法

利用井流试验数据获取含水层的标准曲线配比法，是绘制降深和时间的双对数曲线 lg*s*-lg*t*，然后根据这一曲线与双对数井函数曲线的匹配关系计算含水层水动力参数。

以无越流承压含水层 Theis 井流模型为例，其降深的解析解为

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W(u) \tag{3.7.1}$$

其中

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt}, \quad t = \frac{r^2 S}{4T}\frac{1}{u} \tag{3.7.2}$$

容易推导出以下的两组关系式

$$\lg s = \lg W(u) + \lg\frac{Q}{4\pi T} \tag{3.7.3}$$

$$\lg t = \lg\frac{1}{u} + \lg\frac{r^2 S}{4T} \tag{3.7.4}$$

设 Theis 井函数双对数曲线（标准曲线）的表达式为

$$y = F(x) \Rightarrow \lg W(u) = F\left(\lg\frac{1}{u}\right) \tag{3.7.5}$$

则依据式(3.7.3)和式(3.7.4)有

$$\lg s - \lg\frac{Q}{4\pi T} = F\left(\lg t - \lg\frac{r^2 S}{4T}\right) \tag{3.7.6}$$

这说明 lg*s*-lg*t* 曲线经过平移之后可以与标准曲线 y=$F(x)$ 曲线重合，表示为

$$\lg s - \lg s_0 = F(\lg t - \lg t_0) \tag{3.7.7}$$

其中平移量分别为

$$t_0 = \frac{r^2 S}{4T}, \quad s_0 = \frac{Q}{4\pi T} \tag{3.7.8}$$

在图纸上或借助计算机完成重合匹配工作之后（图 3.17），只要查出(s_0, t_0)，就可以直接用下述公式求出含水层的导水系数和储水系数两个参数

$$T = \frac{Q}{4\pi s_0}, \quad S = \frac{4Tt_0}{r^2} \tag{3.7.9}$$

注意这里的 r 是已知的观测孔离抽水井的距离。

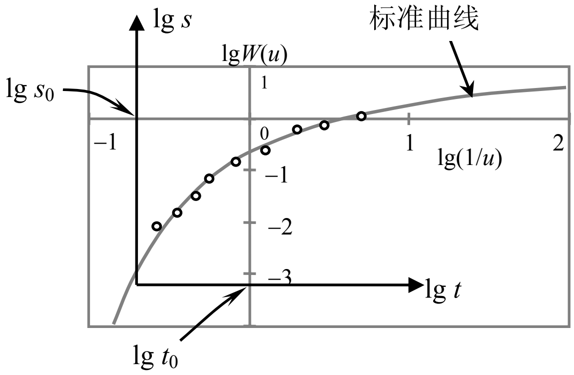


图 3.17　Theis 井流模型的标准曲线配比法

对于第一类越流系统的井流试验，lg*s*-lg*t* 曲线与标准曲线的关系取决于以下两式

$$\lg s = \lg W(u, \frac{r}{B}) + \lg \frac{Q}{4\pi T} \tag{3.7.10}$$

$$\lg t = \lg \frac{1}{u} + \lg \frac{r^2 S}{4T} \tag{3.7.11}$$

标准曲线为 lg$W(u,r/B)$ - lg$(1/u)$曲线，由于含有第二变量 r/B，需要不只一条标准曲线，而应该绘制 r/B 具有不同取值（如取 r/B=0.01~3.0）的一组标准，从中挑选具有最佳匹配度的标准曲线。

其他类型含水层-井孔水流模型的标准曲线配比法，可查阅有关文献。在现代计算机技术比较发达的条件下，标准曲线配比法可以借助于专业软件进行，引入最优化算法获取含水层的参数。

三、 直线图解法

在标准曲线配比法中，为了让两条曲线重合，难以避免主观上的判断，给参数评价带来不确定性。直线图解法利用 *s*-lg*t* 一般会出现近似直线段的特征，根据直线段的斜率和截距计算含水层参数，当直线段比较明确时，可以减小不确定性。

对无越流承压含水层 Theis 井流模型，只要时间足够大，就可以近似表示为

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \ln t + \ln \frac{2.25T}{r^2 S} \tag{3.7.12}$$

这说明对于某个距离为 r 的观测孔，其 *s*-ln*t* 曲线在抽水后期保持为一条直线，取如下形式

$$s = A \ln t - \ln t_0 \tag{3.7.13}$$

在井流试验分析中根据这个直线段的特征得到斜率 A 和截距$-\ln t_0$，就可以求出含水层的参数

$$T = \frac{Q}{4\pi A}, \quad S = \frac{2.25Tt_0}{4r^2} \tag{3.7.14}$$

对于第一类越流系统井流模型，前文中已经证明，*s*-ln*t* 曲线在拐点(s_i, t_i)处存在一个斜率为 m_i 直线段，这个直线段的信息如下

$$t_i = \frac{BrS}{2T}, \quad s_i = \frac{s_{\max}}{2} = \frac{Q}{4\pi T} K_0\left(\frac{r}{B}\right) \tag{3.7.15}$$

$$m_i = \left.\frac{\partial s}{\partial(\ln t)}\right|_{(x_i, t_i)} = s_i F\left(\frac{r}{B}\right) \tag{3.7.16}$$

式中：$s_{\max}$是渗流达到稳定时的降深，而 $F(r/B)$的函数形式如下

$$F\left(\frac{r}{B}\right) = \frac{\exp(-r/B)}{K_0(r/B)} \tag{3.7.17}$$

通过实测降深数据得到直线段信息之后，可按照以下顺序求出含水层参数

$$B = \frac{r}{F^{-1}(m_i/s_i)}, \quad T = \frac{QK_0(r/B)}{4\pi s_i}, \quad S = \frac{2t_i T}{rB} \tag{3.7.18}$$

利用其他类型含水层-井孔水流模型的直线图解法进行井流试验分析，可查阅有关文献。

四、 井孔参数的试验解译

有些井流试验只有抽水井或注水井，没有观测孔，涂抹效应、井损等因素影响了井中水位的形成，给含水层参数的反演带来了一定的困难。在不考虑涂抹效应和井损的情况下，根据含水层-井孔地下水流模型得到的井孔降深可表示为

$$s_w = QF(r_w, t) \tag{3.7.19}$$

式中：$F(r, t)$为井流模型的解析函数。在实际井流试验中，抽水井的降深应考虑涂抹效应和井损，计算模型修改为

$$s_w = QF(r_e, t) + CQ^2 \tag{3.7.20}$$

式中：r_e 是计入涂抹效应之后的有效井径；C 为计算井损的流量系数。

为了获取井损系数 C，可以做不同流量的两次抽水试验（或同时利用降深曲线和水位恢复曲线），然后取固定的时间段Δt，从试验数据中分离出两组降深和流量的关系，表示为

$$\Delta s_{w,1} = Q_1 F(r_e, \Delta t) + CQ_1^2 \tag{3.7.21}$$

$$\Delta s_{w,2} = Q_2 F(r_e, \Delta t) + CQ_2^2 \tag{3.7.22}$$

这样可以确定井损系数为

$$C = \frac{Q_1 \Delta s_{w,2} - Q_2 \Delta s_{w,1}}{Q_2^2 Q_1 - Q_1^2 Q_2} \tag{3.7.23}$$

利用任何一组降深曲线可以确定含水层的导水系数 T，剩下储水系数 S 和井孔的有效井径 r_e 两个参数。由于在解析模型中后两个参数总是叠加在一起，难以分离，只有在知道储水系数 S 的情况下才能计算出井孔有效井径 r_e。

第四章　地下水运动的数值模型

解析解虽然具有精确可靠的特点，但采用解析解反映自然状态和复杂人类活动干扰影响的地下水运动是相当困难的。因此，当含水层的条件严重偏离现有解析模型的简化假设时，人们通过数值模型来获得近似的地下水流场及其演变趋势。

第一节　地下水流数值方法概述

地下水流的数学模型采用偏微分方程描述地下水流的时间和空间连续状态，而数值模型则是采用离散（非连续）时空模型中水头的分布与演变对数学模型进行近似描述。从精确数学模型到近似数值模型的转化，虽然会损失一些精度，但使复杂地下水流问题的分析得以通过机械计算实现，而且误差也是可控的。

把偏微分方程求解的数值方法引入到地下水流问题的求解始于 20 世纪 70 年代，主要方法包括有限差分法、有限元法、边界元法，此后又发展了有限分析法、多重网格法、无网格法等。这些方法的共同特点是将模型空间及边界离散为由一系列的节点以及联系这些节点的单元（无网格法除外），含水层的水头在这些节点上定义，从而实现了水头分布空间连续函数向离散变量的转化，表示为

$$H(x,y,z) \Rightarrow \{H_p; p=1,2,3,...,M\} \tag{4.1.1}$$

式中：H 为含水层的水头；x, y, z 为空间坐标；p 表示数值模型的节点，M 为节点的数目。与此同时，时间也被离散化为一系列具有先后顺序的时刻，不同时刻节点的水头分布方式也不同，每个时刻的节点水头分布结果总是由前一个时刻演变过来的，即

$$\{H_p^k; p=1,2,3,...,M; t=t_k;\} \rightarrow \{H_p^{k+1}; p=1,2,3,...,M; t=t_k+\Delta t_k;\} \tag{4.1.2}$$

式中：k 表示时刻；t 表示时间；Δt_k 表示时间步长。数值模型的核心部分，是在地下水流数学模型的基础上确定节点在流场中的相互关系，并形成如下形式的方程组：

$$C_{p1}H_1^{k+1} + C_{p2}H_2^{k+1} + \cdots C_{pp}H_p^{k+1} + \cdots C_{pM}H_M^{k+1} = F_p^k\text{，}p=1,2,\ldots,M \tag{4.1.3}$$

式中：系数 C_{pL} 反映了节点 p 与节点 L 在流场中的关系，可称为关联系数；$F^k{}_p$ 通常是由前一个时刻决定的常量。式(4.1.3)除包含地下水流控制方程的离散近似以外，还包含了边界条件的离散化处理。当 k=0 时，$F^k{}_p$ 中包含了初始条件。如果模拟稳定流，则 $F^k{}_p$ 与时间无关，上标 k 可以略去。使用矩阵符号，式(4.1.3)可缩写为

$$[C]_{M\times M}\{H\} = \{F\} \tag{4.1.4}$$

实际在处理模型时，一个节点通常只与相隔最近的若干节点有直接的关系，在式(4.1.3)中大多数关联系数为零，而且一般有对称性，即 $C_{pL}=C_{Lp}$。因此，矩阵[C]通常是对称的稀疏矩阵，降低了方程组求解的困难。尽管如此，区域地下水流数值模型的节点数往往很大，而且在某些非线性条件下，[C]本身是待求水头的函数，方程组的求解需要使用迭代法而耗费相当多的时间。

不同类型的地下水流数值模型，最核心的差异在于形成式(4.1.3)的方式，关联系数具有不同的计算公式。原则上，对于完全相同的地下水流数学模型，以及完全相同的离散节点序列和离散时间序列，不同的数值模型应给出近乎同样的结果，只是计算精度略有差异。已有研究表明，某种类型的有限差分法与某种类型的有限单元法存在一定的等价性，但更多的对比分析尚待进一步探讨。实际上，研究者在检验数值模型的可靠性时，总是与解析解的模型对比。当不同方法的数值模型用相同的解析解作验证时，它们之间的等价性就可以得到一定程度的证明。然而，人们对数值模型的偏好并不取决于数值模型之间的等价性，而往往取决于他对某种数值方法的熟悉程度，或者基于某种数值方法专业软件的方便快捷性。

专业软件在地下水流数值模型的推广应用中发挥了重要的作用，如有限差分模拟程序 MODFLOW(McDonald et al.，1988)和 HST3D(Kipp, 1987)、有限元模拟程序 FEMWATER(Lin et al., 1997)和 FEFLOW(Diersch et al., 1998)等，国内有陈崇希等开发的有限差分模拟程序 PGMS(陈崇希等, 2007)。其中，以美国地质调查局发布的有限差分模拟程序 MODFLOW 最为著名，本章末尾将介绍其特点。

第二节　地下水流有限差分模型

有限差分法是地下水流数值模拟最早使用的一种方法。这种方法古典而简洁、物理意义明了、编程容易，因而被广泛流传。地下水流的有限差分模型已经从最初的一维均质模型发展为目前的非均质三维模型，并有专业软件加以实现。

一、　有限差分法的基本原理

有限差分法是求解偏微分方程边值问题和初值问题的一种数值方法，其实质是把连续的模型空间离散化为规则或不规则的网格点，利用导数的差分近似形式代替偏微分方程形成差分方程组，通过求解方程组得到离散点的待求变量作为连续场的一种近似结果。

模型空间的离散化从形态上主要分为规则网格与不规则网格。在二维平面空间，规则网格为一系列与坐标轴平行的直线组成，直线交叉形成的单元(cell)为矩形；在三维空间，规则网格为一系列与坐标轴正交的平面组成，平面相互切割形成的块体(block)为长方体。不规则网格在平面上是由一系列互不重叠的多边形填充模型空间而形成，一般通过分层建立三维空间网格。一维问题空间离散化很简单，就是在坐标轴上生成一系列具有一定间隔的点，或称节点(node)，相邻两个节点之间为线段，待求变量在这些节点上的分布代表了在坐标轴上连续分布的近似状态。有限差分法中的“有限”，是指网格中的节点、单元或块体数目是有限的，每个线段、单元或块体的尺度也是有限的。

首先用一维问题来阐述导数的差分格式。设待求变量 f 沿 x 轴的分布为二阶连续函数 $f(x)$，现将 x 轴离散化为节点$(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$，它们的待求变量为$(f_0, f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots, f_N)$，则 $f(x)$在节点 x_i 处的一阶导数表示为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_i} = \frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i} + O[\Delta x_i] \tag{4.2.1}$$

式中：$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$，为节点的间距。去掉式(4.2.1)中的 Taylor 展开式余项，就得到一阶导数前向差分格式。一阶导数还可以表示成后向差分格式：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_i} \approx \frac{f_i-f_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \tag{4.2.2}$$

式中：$\Delta x_{i-1}=x_i-x_{i-1}$。显然，第一个节点 x_0 处的一阶导数只能表示为前向差分格式，而最后一个节点 x_N 处的一阶导数只能表示为后向差分格式。

有了一阶导数的差分格式之后，再次使用中心差分格式，就可以建立二阶导数的差分格式：

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} \approx \frac{(\partial f/\partial x)_{i+1}-(\partial f/\partial x)_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-1}} \tag{4.2.3}$$

其中，一阶导数在节点 x_{i+1} 采用后向差分格式，在节点 x_{i-1} 采用前向差分格式，则可以得到二阶导数的差分格式为

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} \approx \frac{(x_i-x_{i-1})f_{i+1}-(x_{i+1}-x_{i-1})f_i+(x_{i+1}-x_i)f_{i-1}}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)(x_i-x_{i-1})} \tag{4.2.4}$$

如果相邻节点的间距都相等，即$\Delta x_i= \Delta x_{i-1}=\Delta x$，则上式可简化为

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} \approx \frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{2\Delta x^2} \tag{4.2.5}$$

建立了一阶和二阶导数的差分格式，就可以用它们来改写所研究问题的偏微分方程。

下面用一个简单的例子来说明有限差分模型的建立方法。设有一边值问题的数学模型为

$$a\frac{d^2 f}{dx^2}+b\frac{df}{dx}+c=0\,,\qquad 0<x<2L \tag{4.2.6}$$

$$f(x=0)=u \tag{4.2.7}$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=2L}=v \tag{4.2.8}$$

在建立有限差分模型时，把模型空间[0, 2L]离散化为三个节点(x_0=0, x_1=L, x_3=2L)。对第 2 个节点 x_1 建立控制方程(4.2.6)的差分格式为

$$a\frac{f_2-2f_1+f_0}{2L^2}+b\frac{f_2-f_1}{L}+c=0 \tag{4.2.9}$$

第 1 个节点 x_0 为边界节点，直接利用边界条件(4.2.7)得到

$$f_0=u \tag{4.2.10}$$

第 3 个节点 x_2 也是边界节点，把边界条件(4.2.8)表示成差分格式

$$\frac{f_2 - f_1}{L} = v \tag{4.2.11}$$

这样，由(4.2.6)~ (4.2.8)描述的数学模型就转化为了由方程组(4.2.9)~ (4.2.11)构成的差分模型。求解这个差分方程组，得到

$$f_0 = u\text{，}\quad f_1 = \left(L - \frac{2bL^2}{a}\right)v - u - \frac{2cL^2}{a}\text{，}\quad f_2 = \left(2L - \frac{2bL^2}{a}\right)v - u - \frac{2cL^2}{a} \tag{4.2.12}$$

待求变量的差分模型结果(f_0, f_1, f_2)就反映了数学模型精确解 $f(x)$的特征。

如果我们遇到的是一个初边值问题，例如把上述关于 $f(x)$的边值问题改写为如下关于 $f(x, t)$的数学模型

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial f}{\partial x} + c = e\frac{\partial f}{\partial t}, \qquad 0<x<2L \tag{4.2.13}$$

$$f(x=0, t>0) = u \tag{4.2.14}$$

$$\left.\frac{\partial f(x, t>0)}{\partial x}\right|_{x=2L} = v \tag{4.2.15}$$

$$f(x, t=0) = 0\text{，}\ 0 \le x \le L \tag{4.2.16}$$

其中，式(4.2.16)是初始条件。对于这种初边值问题，我们需要先解决关于时间的偏导数。把时间坐标轴离散化为时步($t_0, t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, t_M$)，则第 k 时刻的控制方程可以写为

$$a\frac{\partial^2 f^k}{\partial x^2} + b\frac{\partial f^k}{\partial x} + c = e\frac{f^k - f^{k-1}}{\Delta t_k}, \qquad 0<x<2L \tag{4.2.17}$$

其中，$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ 为时间步长。时间偏导数取后向差分格式，方程左侧偏导数的自变量全部取第 k 时刻的数值，这种时间上的处理称为隐式差分格式。控制方程也可以处理为显式差分格式，即

$$a\frac{\partial^2 f^{k-1}}{\partial x^2} + b\frac{\partial f^{k-1}}{\partial x} + c = e\frac{f^k - f^{k-1}}{\Delta t_k}, \qquad 0<x<2L \tag{4.2.18}$$

这样可以直接根据前一个时刻的变量分布 f^{k-1} 计算当前时刻的数值 f^k，为

$$f^k = f^{k-1} + \frac{\Delta t_k}{e}\left(a\frac{\partial^2 f^{k-1}}{\partial x^2} + b\frac{\partial f^{k-1}}{\partial x} + c\right), \qquad 0<x<2L \tag{4.2.19}$$

关于时间的偏导数问题解决以后，就可以把上述初始问题的求解转化为一系列离散时刻关于 $f^k(x)$的边值问题的求解。如采用隐式差分格式，则 $f^k(x)$的数学模型为

$$a\frac{d^2 f^k}{dx^2} + b\frac{df^k}{dx} - \frac{e}{\Delta t_k}f^k + \left(c + \frac{ef^{k-1}}{\Delta t_k}\right) = 0, \qquad 0<x<2L \tag{4.2.20}$$

$$f^k(x=0) = u \tag{4.2.21}$$

$$\left.\frac{df^k}{dx}\right|_{x=2L} = v \tag{4.2.22}$$

利用边值问题的有限差分法，可以把上述数学模型转化为有限差分模型，得到各个节点上的待求变量，只要把前一时刻的求解出来的结果 f^{k-1} 代入到式(4.2.20)即可。数值模型求解的流程见图 4.1。

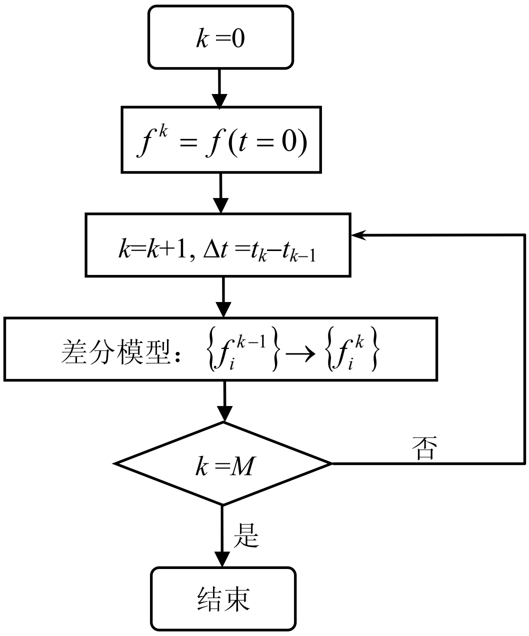


图 4.1　初边值问题有限差分模型的求解流程示意图

有限差分模型必须满足收敛性和稳定性才是有价值的。收敛性的含义是当离散网格的Δx、Δy、Δz、Δt 趋于零时，有限差分模型的离散解应趋于数学模型的精确解，即随着网格剖分尺度和时间步长的缩小，模型的误差也越来越小。稳定性则与初边值问题在时间上的推进有关，初边值问题在有限差分模型中是转化为各个时步的边值问题求解的，如果前一个时步差分方程求解带来的误差不会在以后的时步中积累，则差分模型是稳定的。否则模型不稳定，随着时步的推进，模型误差将不断积累增大，越来越偏离精确解。

对地下水流的有限差分模型，人们已经证明(陈崇希等, 1989)隐式差分格式是无条件收敛和稳定的，而显式差分格式虽然满足收敛性，但一般只有在时间步长较小、网格剖分尺度相对较大的时候才满足稳定性。因此，绝大多数地下水流有限差分模型采用隐式差分格式进行求解。

二、　基于矩形网格的地下水流差分方程

用矩形网格对模型空间进行离散，是地下水流数值模拟的常用方法，因为规则网格便于图形显示和数据处理。在矩形网格上建立二维地下水流的有限差分模型，既可以直接套用偏导数的差分格式，也可以根据水均衡原理进行推导。

考虑给一个承压含水层建立矩形网格的差分模型，在矩形网格的每个单元形心处设置一个节点，如图 4.2 中的圆点，节点的离散网格编号为(i, j)，其坐标为(x_i, y_j)。对于模型边界以内的节点，一般都有 8 个相邻节点，如图 4.2 中节点 0$(i,\ j)$分别与节点 1~节点 8 相邻。如果含水层的渗透性主轴方向与网格坐标轴的方向一致，则仅用节点 1~节点 4 就可以建立节点 0 所在矩形单元的地下

水流差分方程。

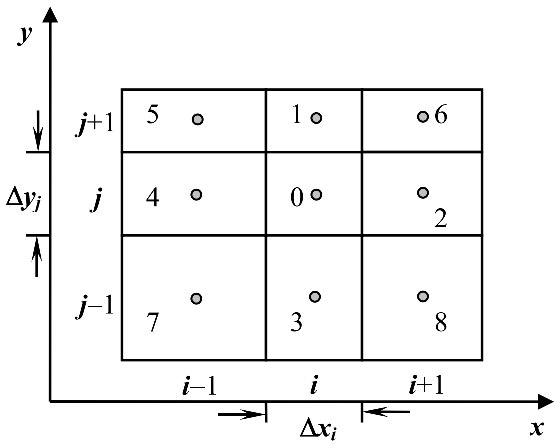


图 4.2 矩形网格差分模型的局部特征

设含水层均质各向异性，导水系数为 T_x 和 T_y，储水系数为 S。在 t=t_k 时刻，地下水的水头在节点上的分布为$\{H^k\}$，根据达西定律，从周围四个节点（节点 1~节点 4）流向节点 0 的流量用差分格式可分别表示为

$$Q_1 = T_y \Delta x_i \frac{H_1^k - H_0^k}{y_{j+1} - y_j}；\quad Q_2 = T_x \Delta y_j \frac{H_2^k - H_0^k}{x_{i+1} - x_i}；$$

$$Q_3 = T_y \Delta x_i \frac{H_3^k - H_0^k}{y_j - x_{j-1}}；\quad Q_4 = T_x \Delta y_j \frac{H_4^k - H_0^k}{x_i - x_{i-1}}$$

而第 k 个时步内，节点 0 所在矩形单元内的地下水贮存量增加值表示为

$$\Delta V_w = S \Delta x_i \Delta y_j (H_0^k - H_0^{k-1}) \tag{4.2.23}$$

这个方程中隐含的假定是：单元内的平均水头变化与节点 0 处的水头变化相等。根据水均衡原理，单元内水体积的增加量应与侧向流量在时间步长内的积累和其他外部补给量相互平衡，即

$$\Delta V_w = \left(\sum_{n=1}^{4} Q_n + Q_a \right) \Delta t_k \tag{4.2.24}$$

式中：Q_a 为其他外部补给流量。上式的展开式为

$$\frac{(H_1^k - H_0^k)T_y}{(y_{j+1} - y_j)\Delta y_j} + \frac{(H_2^k - H_0^k)T_x}{(x_{i+1} - x_i)\Delta x_i} + \frac{(H_3^k - H_0^k)T_y}{(y_j - x_{j-1})\Delta y_j} + \frac{(H_4^k - H_0^k)T_x}{(x_i - x_{i-1})\Delta x_i}$$

$$+ \frac{Q_a}{\Delta x_i \Delta y_j} = \frac{S}{\Delta t_k}(H_0^k - H_0^{k-1}) \tag{4.2.25}$$

这就是对应节点 0(i, j)的地下水流差分方程，它可以进一步变形为

$$C_0H_0^k + C_1H_1^k + C_2H_2^k + C_3H_3^k + C_4H_4^k = F \tag{4.2.26}$$

其中：

$$C_1 = -\frac{T_y}{(y_{j+1}-y_j)\Delta y_j}\text{；}\quad C_2 = -\frac{T_x}{(x_{i+1}-x_i)\Delta x_i}\text{；}$$

$$C_3 = -\frac{T_y}{(y_j-y_{j-1})\Delta y_j}\text{；}\quad C_4 = -\frac{T_x}{(x_i-x_{i-1})\Delta x_i}\text{；}$$

$$C_0 = \frac{S}{\Delta t_k} - (C_1+C_2+C_3+C_4)\text{；}\quad F = \frac{Q_a}{\Delta x_i \Delta y_j} + \frac{SH_0^{k-1}}{\Delta t_k}$$

对于任何一个内部节点都可以写出形如式(4.2.25)的差分方程，然后运用边界条件写出边界节点的差分方程。所有节点的差分方程联立求解，即得到 t_k 时刻水头分布的离散形式。

如果含水层是非均质的，那么可以对每个节点所在的矩形单元设置不同的参数（导水系数 T 与储水系数 S），例如用

$$T_0^x, T_0^y\text{；}\ T_1^x, T_1^y\text{；}\ \ldots\text{；}\ T_8^x, T_8^y$$

分别表示节点 0 及其相邻节点所在矩形单元的 x 方向和 y 方向的导水系数。那么节点之间的单元界面流量，可以用一个平均意义上的导水系数进行计算，以节点 1 流向节点 0 的流量为例：

$$Q_1 = T_{0,1}^y \Delta x_i \frac{H_1^k - H_0^k}{y_{j+1}-y_j} \tag{4.2.27}$$

其中的平均导水系数通常采用调和平均值

$$T_{0,1}^y = \frac{2T_0^y T_1^y}{T_0^y + T_1^y} \tag{4.2.28}$$

依此类推其他节点与节点 0 之间的平均导水系数。考虑这种非均质参数分布之后，式(4.2.26)中的各项系数更新为

$$C_1 = -\frac{T_{0,1}^y}{(y_{j+1}-y_j)\Delta y_j}\text{；}\quad C_2 = -\frac{T_{0,2}^x}{(x_{i+1}-x_i)\Delta x_i}\text{；}$$

$$C_3 = -\frac{T_{0,3}^y}{(y_j-y_{j-1})\Delta y_j}\text{；}\quad C_4 = -\frac{T_{0,4}^x}{(x_i-x_{i-1})\Delta x_i}\text{；}$$

$$C_0 = \frac{S_0}{\Delta t_k} - (C_1+C_2+C_3+C_4)\text{；}\quad F = \frac{Q_a}{\Delta x_i \Delta y_j} + \frac{S_0H_0^{k-1}}{\Delta t_k}$$

注意其中的外部补给流量 Q_a 可能既与节点有关，又随时间变化。

如果研究对象是潜水含水层，把上述差分方程中的储水系数 S 改为给水度 S_y，至于导水系数 T，则可以根据饱和厚度计算出每个节点所在单元的等效导水系数，以节点 0 为例，有

$$T_0 = K_0(H_0^k - z_{b0}) \tag{4.2.29}$$

式中：K_0 是含水层在节点 0 处的渗透系数；z_{b0} 为含水层底板在节点 0 处的高程。这样就导致了一个新问题，在潜水含水层的差分方程(4.2.26)中，系数 C_0~C_4 等与待求的水头序列$\{H^k\}$有关，从而使式(4.2.26)变成非线性方程。解决这个问题的办法有以下几种：

(1) 显式法

用前一个时刻的已知水头序列$\{H^{k-1}\}$计算潜水含水层的导水系数，在时步内不再更新。当时间步长较大，水头变化明显时，这种方法精度较低。

(2) 预测-校正法

首先用显式法求出 $t_{k-1/2}$ 时刻的水头序列$\{H^{k-1/2}\}$，时间步长设置为$\Delta t_k/2$，然后计算出中间时刻的导水系数，重新计算系数 C_0~C_4，返回去由前一时刻的已知水头序列$\{H^{k-1}\}$求出待求水头序列$\{H^k\}$，时间步长恢复为Δt_k。

(3) 迭代法

首先用显式法求出水头序列$\{H^k\}$，并计算出新的导水系数，重新计算系数 C_0~C_4，返回去再次求解水头序列$\{H^k\}$，如此反复，直到前后两次计算得到的水头几乎相同（由允许误差控制）为止。这种方法较为精确，但计算量大。

基于矩形网格的地下水流三维模型，一般是进行分层处理，每层都是同样的矩形网格。网格单元为长方体，每个方体内设置节点，编号的形式为(i, j, l)，其中的 l 表示层序号。在建立地下水流差分方程时，除了同层的 4 个相邻方体单元之外，还需要考虑上下相邻的 2 个方体单元，因此每个内部节点一般包含 6 个相邻节点。关于分层矩形网格的三维地下水流差分模型，在有关 MODFLOW 模型的章节中将具体阐述。

三、 基于多边形网格的地下水流差分方程

基于矩形网格的有限差分法虽然简单，但是在处理不规则的模型边界和局部加密方面存在缺陷，会导致网格浪费。基于多边形网格的有限差分法可以适应不规则的边界，并且能够在不显著增加整体节点数的情况下加密局部网格。多边形网格的形成，需要先建立模型空间的三角形剖分离散网格，作为辅助网格，再用三角形单元各边的中垂线连接为各个节点所对应的多边形（图 4.3）。

辅助三角形网格的剖分应注意(陈崇希等, 1989)：① 三角形的任一内角应小于 90°，尽可能接近正角形；②三角形的顶点不能落在另外某个三角形的边上，即节点之间的连线最多与 2 个三角形相连；③节点的分布需要考虑地下水流动的控制条件，如河流、井点等。辅助三角形生成之后，再组建多边形网格，其方法类似于气象水文学中降雨量插值的泰森多边形法(Bear, 1979)，对每条三角形的边作垂直平分线，直到与其他的垂直平分线相交，这些垂直平分线连接成一个一个的多边形，每个多边形包围一个节点，作为该节点的控制区。对具有多边形特征的节点控制区建立地下水流偏微分方程的差分格式，可以利用封闭域内体积分与边界积分之间的关系（高斯定律），其方式与有限体积法一致。因此，在某种程度上说，基于多边形网格的有限差分法属于有限体积法。

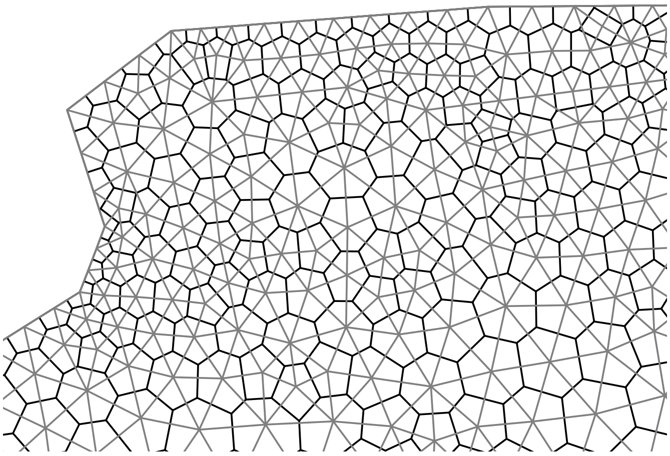


图 4.3 一个平面多边形网格的局部图（灰色线为辅助三角形网格）

不过，节点控制区的差分方程也可以在水均衡原理的基础上建立。设模型研究的对象是一个均质各向同性的承压含水层，从多边形网格的内部取一个节点控制区进行分析，如图 4.4。节点 0 与 N 个节点相邻，对于第 i 个节点，节点 0 与节点 i 之间连线的长度为 L_i，而对应的垂直平分线的宽度为 w_i，则在节点 i 与节点 0 之间流向控制区的流量 Q_i 可根据达西定律计算为

$$Q_i = Tw_i \frac{H_i - H_0}{L_i} \tag{4.2.30}$$

式中：T 是含水层的导水系数；H_i 和 H_0 分别为节点 i 与节点 0 的水头。所有相邻节点与控制区之间都可以建立这样的关系，因此从控制区周围流向控制区内的地下水的总流量应为

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i^k = T\sum_{i=1}^{N} \frac{w_i}{L_i}(H_i^k - H_0^k) \tag{4.2.31}$$

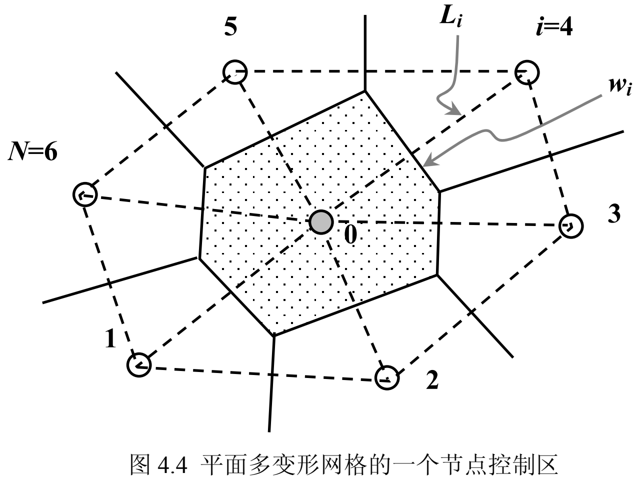


图 4.4 平面多变形网格的一个节点控制区

式(4.2.31)中把时间节点 k 也放进去了。在时间步长Δt_k 内，控制区内地下水的总体积的增加量为

$$\Delta V_w = SA_0(H_0^k - H_0^{k-1}) \tag{4.2.32}$$

式中：S 为含水层储水系数；A_0 为节点 0 的控制区面积。式(4.2.32)中隐含的假设是节点 0 处的水头变化与控制区内的平均水头变化相等。根据水均衡原理，控制区水体积的增加量应该与流入控

制区的总水量相互平衡，即有

$$\left(Q_a+\sum_{i=1}^{N}Q_i\right)\Delta t=\Delta V_w \tag{4.2.33}$$

其中 Q_a 是其他的外部补给流量。把式(4.2.33)展开得到

$$Q_a\Delta t+T\Delta t\sum_{i=1}^{N}\frac{w_i}{L_i}(H_i^k-H_0^k)=SA_0(H_0^k-H_0^{k-1}) \tag{4.2.34}$$

此式可以进一步改写为

$$\left(SA_0+T\Delta t\sum_{i=1}^{N}\frac{w_i}{L_i}\right)H_0^k-T\Delta t\sum_{i=1}^{N}\frac{w_i}{L_i}H_i^k=Q_a\Delta t+SA_0H_0^{k-1} \tag{4.2.35}$$

这就是节点控制区的地下水流差分方程。对于多边形网格中的每个内部节点，都可以建立相同形式的差分方程，与边界节点的差分方程一起形成求解模型的方程组。

每个相邻节点对应的 w_i/L_i 数值，以及节点控制区的面积 A_0，可以根据辅助三角形网格的几何信息进行计算，具体方法见有关文献。

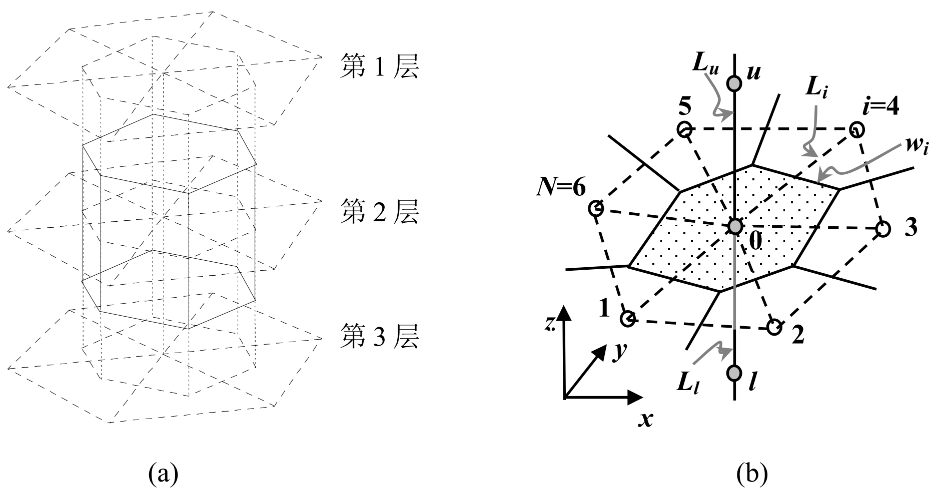


图 4.5 三维分层多边形网格及其节点控制区

利用多边形网格建立三维有限差分模型的方法，一般是建立分层的多边形网格以模拟含水层的构造特征，如图 4.5(a)所示。每个节点除了和同一层的若干节点相邻之外，还与上层或下层相同平面位置的节点相邻，以图 4.5(b)中的节点 0 为例，其同层相邻节点为节点 1~节点 N，而节点 u 和节点 l 分别为上层相邻节点和下层相邻节点，它们与节点 0 连线的中垂面和平面控制区共同形成节点 0 的三维控制体，这个控制体的水量均衡方程为

$$\left(Q_a+\sum_{i=1}^{N}Q_i\right)\Delta t+(Q_u+Q_l)\Delta t=\Delta V_w=S_sV_0(H_0^k-H_0^{k-1}) \tag{4.2.36}$$

式中：Q_u 和 Q_l 分别为控制体顶面和底面流向控制体内的流量；S_s 为含水层的储水率；V_0 为节点 0 控制体的体积。控制体顶底面的垂向流量根据达西定律计算为

$$Q_u = K_V A_0 \frac{H_u^k - H_0^k}{z_u - z_0}；\ Q_l = K_V A_0 \frac{H_l^k - H_0^k}{z_0 - z_l} \tag{4.2.37}$$

式中：$K_V=K_z$为含水层的垂向渗透系数；$z_u-z_0=L_u$，为节点 u 与节点 0 的高差；$z_0-z_l=L_l$，为节点 l 与节点 0 的高差，见图 4.5(b)。在式(4.2.36)中，计算侧向流量 Q_i 时应使用水平渗透系数 $K_H=K_x=K_y$（仅考虑横观各向同性条件），每个节点控制区都可以计算出等效的导水系数，形如

$$T_0 = \frac{1}{2} K_H (L_u + L_l) = \frac{1}{2} K_H (z_u - z_l) \tag{4.2.38}$$

在计算侧向流量时使用调和平均的导水系数，即

$$Q_i = \frac{2T_i T_0}{T_i + T_0} \frac{w_i}{L_i} (H_i^k - H_0^k) \tag{4.2.39}$$

把式(4.2.39)和(4.2.37)代入(4.2.36)可得三维网格地下水流的差分方程。

四、 地下水流控制条件的差分方程

在建立了内部节点的差分方程之后，还必须建立地下水流控制条件的差分方程，包括边界条件和某些特殊的水文地质条件，其方法是建立具有不同边界类型的边界节点的差分方程，同时对某些具有特殊水文地质条件的内部节点改写差分方程。常见的控制条件包括以下类型：

(1) 已知水头边界

如果节点在已知水头边界上，则直接把计算时刻的已知水头赋予该节点。

(2) 已知流量边界

如果一个节点在已知流量或流速的边界上，则应把边界流量纳入到差分方程(4.2.25)的外部补给项 Q_a 之中。设边界上的单宽流量为 q，沿着 x 坐标轴方向，则对于矩形网格图 4.6(a)中的节点 0，外部补给项计算为

$$Q_a = q \Delta y_0 \tag{4.2.40}$$

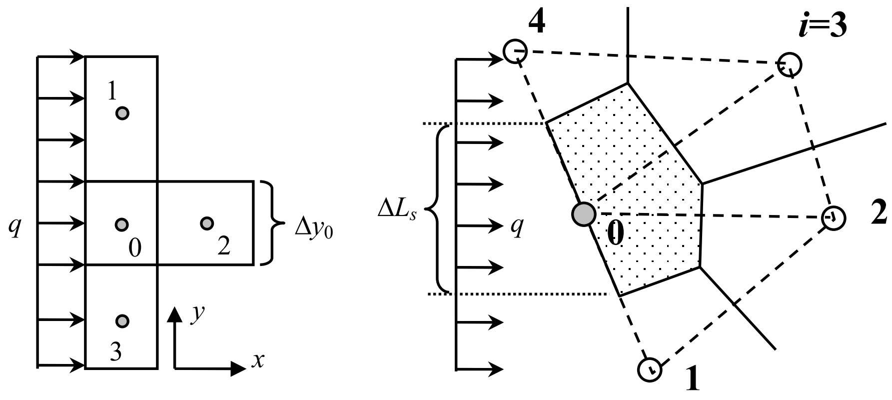
而差分方程(4.2.26)变为

$$C_0 H_0^k + C_1 H_1^k + C_2 H_2^k + C_3 H_3^k = F \tag{4.2.41}$$

式中：F 已经包含了外部补给项 Q_a。对于多边形网格图 4.6(b)中的节点 0，流向控制区的边界流量需要根据控制区外侧边在 y 轴上的投影长度ΔL_s 计算，即

$$Q_a = q \Delta L_s \tag{4.2.42}$$

节点 1 和节点 4 都属于边界节点。节点 0 的控制区对应的水流差分方程仍然保持式(4.2.35)。



(a) (b)

图 4.6　已知流量边界上的节点

(3) 越流控制条件

如果要模拟第一类越流系统的地下水流，且只把承压含水层作为模拟层，则越流量需要考虑在外部补给项 Q_a 中，即

$$Q_a = \frac{K_c}{m_c} A_0 (H_c - H_0^k) \tag{4.2.43}$$

式中：K_c 和 m_c 分别为弱透水层的垂向渗透系数和厚度；H_c 是作为补给源的含水层的固定水头，而 A_0 为节点 0 所在矩形单元或控制区的面积。对于矩形多边形网格，越流量 Q_a 加入方程(4.2.25)中，但由于其中含有待求变量—节点 0 的水头，差分方程(4.2.26)中的系数 C_0 和常数项 F 需要修改为

$$C_0 = \frac{S_0}{\Delta t_k} - (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + \frac{K_c \Delta x_i \Delta y_j}{m_c \Delta t_k} \tag{4.2.44}$$

$$F = \frac{Q'_a}{\Delta x_i \Delta y_j} + \frac{S_0 H_0^{k-1}}{\Delta t_k} + \frac{K_c \Delta x_i \Delta y_j}{m_c \Delta t_k} H_c \tag{4.2.45}$$

式中：Q'_a 是除了越流量以外其他的外部补给流量。

(4) 潜水面

在三维有限差分模型中，具有潜水面的模拟层一般被作为顶层处理，其特殊之处在于导水系数 T 用地下水饱和厚度计算，而地下水贮存量的变化部分用给水度 S_y 计算，导致模拟层的节点差分方程为非线性方程，可使用显式法、预测-校正法或迭代法求解。在实际模拟过程中，往往还有可能出现顶部模拟层被疏干、而潜水面移动到下部模拟层的现象，需要进行技术上的处理。目前，不同的专业模型软件对此具有不同的处理方法，如 MODFLOW 程序中使用的干湿交替处理法将在第六节中说明。

(5) 井孔

井孔在模拟含水层-井孔系统地下水流时，是最重要的控制条件之一。然而，常规的有限差分模型在处理抽水井和定降深井方面存在缺陷，需要进行校正，具体方法见下一小节。

(6) 其他特殊条件

地下水与河流、湖泊、泉点等的相互作用、降水入渗补给、潜水的蒸发排泄等，都是需要在

有限差分模型中处理的特殊条件。各种处理方法属于地下水流数值模拟的专门技术，反映了模拟者对这些特殊条件下地下水流物理机制的认识。

五、 地下水流差分模型的井孔校正

常规的地下水流数值模型一般仅仅把井孔的抽水流量以外部补给项 Q_a（抽水为负）的形式加入到差分方程，虽然可以反映抽水井对周围节点的影响，但抽水井本身所在位置的水头结果不正确。另外，对于定降深井，如自流井，常规的做法是直接把井孔的已知水头设置到所在的节点上，但计算得到的井流量不正确。这是一种“算不准”现象，即已知流量的井孔算不准井孔水头，而已知水头的井孔算不准井孔流量。为了解决“算不准”问题，需要对常规的有限差分模型进行校正。

关于抽水井的问题，Prickett(1967)、Peaceman(1978)和陈崇希等(1989)已经指出有限差分模型中井点单元(well-block)的计算水头不等于井孔中的水头，通过引入井孔附近稳定流或拟稳定流的解析解，提出了校正公式。以正方形网格为例（图 4.7），校正公式（陈崇希等, 1989）为

$$H_w = H_{i,j} - \frac{Q_w}{2\pi T}\left(\ln\frac{\Delta x}{r_w} - \frac{\pi}{2}\right) \tag{4.2.46}$$

可以通过引入一个等效半径 r_{eq} 来改写这个公式，即

$$H_w = H_{i,j} - \frac{Q_w}{2\pi T}\ln\frac{r_{eq}}{r_w} \tag{4.2.47}$$

其含义是：差分模型求解得到的井点单元水头，相当于距离井心为 r_{eq} 处的水头，并非实际的井孔水头。等效半径只与差分网格的尺寸有关

$$r_{eq} = \frac{\Delta x}{\exp(\pi/2)} \approx 0.208\Delta x \tag{4.2.48}$$

由于井孔半径 r_w 一般远小于模型的网格尺寸Δx，模型计算水头往往远远低估了抽水井本身的降深，在绘制井孔周围等值线图时显示出过小的水力梯度。有了校正式(4.2.47)之后，就可以先用常规优先差分模型计算井点单元的水头，然后直接进行校正得到井孔的水头。在校正时，r_w 是必须提供的参数。

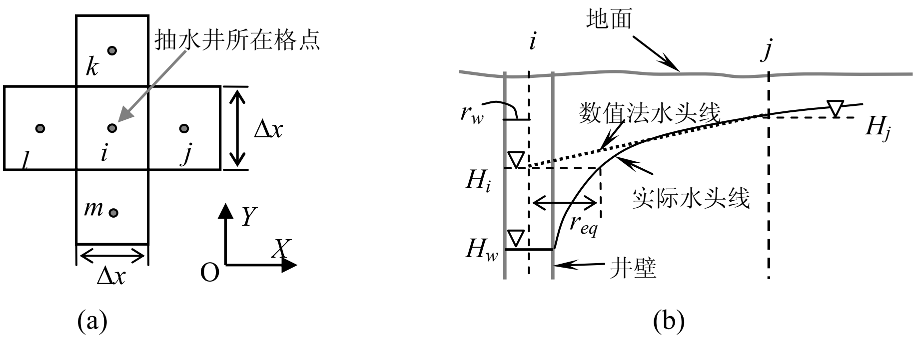


图 4.7 正方形差分网格及抽水井附近水头分布图

然而，上述校正公式是在正方形网格、无面源补给的情况下调用稳定井流解析解推导出来的，是否能够适应矩形网格、不规则网格以及有面源补给（越流等）的情况呢？定降深井孔是否也能直接用式(4.2.47)进行校正呢？在此，我们对承压含水层建立一种更加普遍的校正方法来解决这个问题。

为了得到具有实用性的解析解，对井孔附近采取以下的简化假设：

1) 井孔附近的地下水在水平方向上是径向流动；

2) 井孔附近的含水层为均质各向同性，导水系数为 T、储水系数为 S；

3) 井孔的滤管穿透了所研究的含水层（模拟层）。

在上述假设的基础上，井孔附近的地下水流可以用下述方程描述

$$T\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}+\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}\right)+\varphi=S\frac{\partial H}{\partial t} \tag{4.2.49}$$

式中：φ是一个由外部因素决定的面源补给项。引入一个ε-因子改写上述方程，即

$$T\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}+\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}\right)+\varepsilon=0 \tag{4.2.50}$$

$$\varepsilon=\varphi-S\frac{\partial H}{\partial t} \tag{4.2.51}$$

这个ε-因子综合考虑了面源补给与含水层贮存量的变化，并且我们再引入一个简化假设：ε-因子在井孔附近与径向距离 r 无关。这个假设并不符合实际，目的是在当前条件下获得一个实用的近似解，其影响将在得到校正公式之后论述。

给定流量为 Q_w，水头为 H_w 的井孔边界条件

$$H(r=r_w)=H_w,\ 2\pi r_w T\left.\frac{\partial H}{\partial r}\right|_{r=r_w}=Q_w \tag{4.2.52}$$

可以求出方程(4.2.50)满足ε-因子假设的解析解为

$$H(r)-H_w=\frac{Q_w+\pi\varepsilon r_w^2}{2\pi T}\ln\frac{r}{r_w}-\frac{\varepsilon}{4T}(r^2-r_w^2),\quad r\ge r_w \tag{4.2.53}$$

由于井孔半径 r_w 一般远小于研究尺度下的径向距离 r，上式可进一步简化为

$$H(r)-H_w=\frac{Q_w}{2\pi T}\ln\frac{r}{r_w}-\frac{\varepsilon}{4T}r^2,\quad r\ge r_w \tag{4.2.54}$$

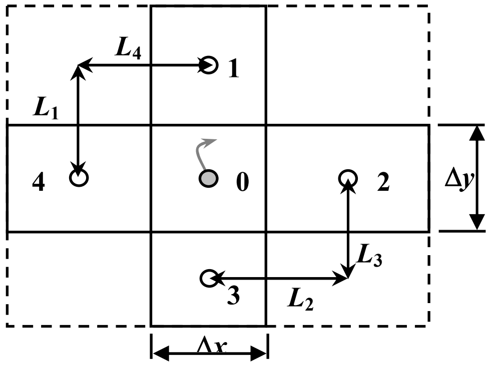


图 4.8 矩形差分网格中的井点单元

对于矩形网格（图 4.8），常规差分模型采用下式建立井点 0 所在矩形单元的差分方程

$$T\left(\Delta x\frac{H_1^k-H_0^k}{L_1}+\Delta y\frac{H_2^k-H_0^k}{L_2}+\Delta x\frac{H_3^k-H_0^k}{L_3}+\Delta y\frac{H_4^k-H_0^k}{L_4}\right)=Q_w-\varepsilon\Delta x\Delta y \tag{4.2.55}$$

其中ε-因子为

$$\varepsilon=\varphi_0^n-S\frac{H_0^k-H_0^{k-1}}{\Delta t} \tag{4.2.56}$$

然而，当井孔附近的径向流扩展到相邻节点 1~节点 4 时，这些相邻节点上的水头还可以通过(4.2.54)获取

$$H_i^k=H_w^k+\frac{Q_w}{2\pi T}\ln\frac{L_i}{r_w}-\frac{\varepsilon}{4T}L_i^2\quad,\ i=1,2,3,4 \tag{4.2.57}$$

式中：L_i是节点 i 与节点 0 的距离，见图 4.8。

把式(4.2.57)代入式(4.2.55)得到

$$A(H_w^k-H_0^k)+\frac{B}{T}Q_w-\frac{\varepsilon}{T}E=\frac{Q_w-\varepsilon\Delta x\Delta y}{T} \tag{4.2.58}$$

其中

$$A=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\ ,\ \ B=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{4}\left[\lambda_i\ln\frac{L_i}{r_w}\right],\ \ E=\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\lambda_i}{4}L_i^2\right) \tag{4.2.59}$$

$$\lambda_1=\Delta x/L_1,\lambda_2=\Delta y/L_2,\lambda_3=\Delta x/L_3,\lambda_4=\Delta y/L_4 \tag{4.2.60}$$

其中的系数 A、B、E 都只取决于网格的形状，可称为几何因子。式(4.2.28)建立了井孔流量 Q_w、计算井点水头 H_0 和井孔实际水头 H_w 之间的定量关系，即

$$Q_w=\frac{A}{B-1}T(H_0^k-H_w^k)-\varepsilon\frac{E-\Delta x\Delta y}{B-1} \tag{4.2.61}$$

这是在综合考虑面源补给、地下水贮存量变化和非正方形网格的条件下推导出来的校正公式，因此更具有普遍意义。

下面讨论ε-因子的影响。如果井点单元的相邻单元都具有相同的横向尺寸Δx 和纵向尺寸Δy，则有

$$E = \Delta x \Delta y \tag{4.2.62}$$

因此，式(4.2.61)中关于ε-因子的项被抵消了，校正公式可进一步简化为

$$Q_w = \frac{A}{B-1} T(H_0^k - H_w^k) \tag{4.2.63}$$

只要在模型网格剖分时稍加注意，这一点很容易实现。实际上，在相邻单元尺寸与井点单元尺寸相差不显著的情况下，几何因子 E 接近于井点单元的面积$\Delta x \Delta y$，从而使ε-因子对井孔校正结果的影响比较小，基本可以忽略。由于具有这种能够被抵消的性质，即使ε-因子是非均匀分布的，其影响也将在一定程度上削弱。当然，如果ε-因子的分布在井孔附近剧烈变化，假设ε-因子与径距无关还是可能带来一定的误差，有待改进。

当井孔附近的网格尺寸完全均匀时，Δx=Δy，有

$$A = 4,\ B = \frac{2}{\pi} \ln \frac{\Delta x}{r_w},\ E = \Delta x^2 \tag{4.2.64}$$

则校正公式可还原为

$$Q_w = \frac{2\pi T(H_0^k - H_w^k)}{\ln(r_{eq} / r_w)} \tag{4.2.65}$$

其中等效半径 r_{eq} 与式(4.2.48)相同。这说明 Prickett(1967)等提出的校正公式是更普遍的校正公式(4.2.61)的一个特例。

有限差分模型中井孔的校正需要区别考虑已知流量井孔和已知水头井孔。对于已知流量井孔，先把井孔流量 Q_w 代入常规差分方程(4.2.55)，得到井点单元的计算水头 H_0，然后调用校正公式(4.2.61)求出实际的井孔水头 H_w。而对于已知水头的井孔，则先把校正公式(4.2.61)表示的井孔流量 Q_w 代入常规差分方程(4.2.55)，其中 H_w 取已知的井孔水头，利用新的差分方程计算出井点单元的特征水头 H_0，然后再次调用校正公式(4.2.61)计算出井孔流量 Q_w。这样就解决了常规有限差分模型的“算不准”问题。

关于多边形网格有限差分模型中井孔的校正，将在有限元模型的井孔校正方法中给出。

六、 差分方程组的求解方法

设有限差分模型中有 M 个节点，对于任一节点 p 都可以建立形如式(4.2.26)或式(4.2.35)、式(4.2.36)的差分方程，不妨用下述形式的通式描述

$$C_{p0}H_p^k + C_{p1}H_{p-1}^k + \cdots + C_{pi}H_{p-i}^k + \cdots + C_{pi}H_{p-N_p}^k = F_p^{k-1},\ p=1,2,\ldots,M \tag{4.2.66}$$

式中：下标 p-i(注意中间并非减号)表示与节点 p 相邻的第 i 个节点在整体网格中的序号；C_{pi} 表示节点 p 和节点 p-i 之间的水流关联系数；F_p 表示对应节点 p、取决于前一时刻水头分布和本时步时间步长的已知变量。考虑 C_{pi} 与待求变量 H_{p-i} 无关，则上述方程组为线性方程组，可用矩阵和向量表示为

$$[C]\{H\} = \{F\} \tag{4.2.67}$$

式中：$[C]$为渗透矩阵，$\{H\}$为节点水头列向量，$\{F\}$为右端项列向量。该方程组的解为

$$\{H\}=[C]^{-1}\{F\} \tag{4.2.68}$$

运用线性方程组的求解方法可得到上述解。

对于节点数 M 较小的问题，线性方程组的求解可采用 Gauss 消去法、LU 分解法等直接法。然而，当节点数很大时，直接法的工作量太大，可考虑采用其他方法，如迭代法、共轭梯度法等。为了说明迭代法的思路，我们把式(4.2.66)中表示时刻的上标 k 暂时省略，方程组变为

$$C_{p0}H_p+C_{p1}H_{p-1}+\cdots+C_{pi}H_{p-i}+\cdots+C_{pi}H_{p-N_p}=F_p\text{，}p=1,2,\ldots,M \tag{4.2.69}$$

关于节点 p 的方程可转化为

$$H_p=\frac{F_p}{C_{p0}}-\frac{1}{C_{p0}}\sum_{i=1}^{N_p}C_{pi}H_{p-i} \tag{4.2.70}$$

上式提供了一种迭代求解的途径。迭代法的步骤是首先令节点的水头等于前一时刻的水头，即

$$H_p^0=H_p^{k-1}\text{，}p=1,2,\ldots,M \tag{4.2.71}$$

其中，上标 0 表示第 0 次迭代运算。再调用式(4.2.70)进行迭代运算，每次迭代运算的公式为

$$H_p^{n+1}=\frac{F_p}{C_{p0}}-\frac{1}{C_{p0}}\sum_{i=1}^{N_p}C_{pi}H_{p-i}^n\text{，}n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{4.2.72}$$

其中，上标 n 表示第 n 次迭代。经过足够多次的迭代运算之后，前后两次迭代得到的水头值几乎相等，判断指标为

$$\Delta H_{\max}=\max\{|H_p^n-H_p^{n-1}|;p=1,2,...,M\} \tag{4.2.73}$$

其中，$\Delta H_{\max}$ 表示每次迭代结果与前一次迭代结果的最大差距，如果它小于允许误差，迭代过程即可停止

$$\Delta H_{\max}\le\varepsilon_H \tag{4.2.74}$$

其中 ε_H 是预先设置的收敛标准。

为了使迭代收敛更快，可以引入松弛因子ω，并把迭代公式(4.2.72)改为

$$H_p^{n+1}=\omega\left(\frac{F_p}{C_{p0}}-\frac{1}{C_{p0}}\sum_{i=1}^{N_p}C_{pi}H_{p-i}^n\right)+(1-\omega)H_p^n\text{，}n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{4.2.75}$$

松弛因子的取值范围是 $1<\omega<2$，这种迭代格式称为超松弛法。在采用迭代法求解某些非线性问题时，可能使用 $\omega<1$ 才能得到收敛结果，这种迭代格式称为低松弛法。

第三节　地下水流有限元模型

有限元数值模拟技术在固体力学和流体力学中都有广泛的应用，也经常用于进行地下水流的

数值模拟。有限元法的原理与有限差分法有所不同，有限差分法以偏微分方程的差分近似为基础，而有限元法以积分方程的离散近似为基础。在历史上，曾经有两种推导有限元方程的途径：迦辽金(Galerkin)法与里茨(Ritz)法。Galerkin 法采用加权余量的积分公式（以平面模型为例）

$$\iint_\Omega R[H'(x,y)]w(x,y)dxdy = 0 \tag{4.3.1}$$

式中：$R(H')$是近似解 H' 形成的余量函数；w 为权函数；Ω是模型的某个子域。

Rietze 法是利用与地下水流偏微分方程等价的范函极值函数进行求解(张蔚榛, 1983; 陈崇希等, 1989)，这个极值函数的形式为

$$J(H) = \iint_\Omega F\left(x, y, H, \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}\right)dxdy \tag{4.3.2}$$

其中 F 也是一个泛函。只要对这个泛函进行恰当的定义，可以使 $J(H)$取极小值的函数 $H(x, y, t)$恰好满足地下水流偏微分方程。于是，地下水流方程的近似解通过以下极值条件方程

$$\frac{\partial J}{\partial H_p} = \iint_\Omega \frac{\partial F}{\partial H_p}dxdy = 0\text{，}\ p=1,2,3,\ldots \tag{4.3.3}$$

得到，其中 H_p 是模型子域上的节点水头。已有证明，当有限元网格单元采用相同的插值函数及形函数时，上述两种方法实际上是完全等价的，所形成的代数方程组相同。为此，本书中不再对有限元法的积分方程进行推导。

一、 单元与形函数

最常见的平面有限单元网格是三角形网格，而四边形网格也有较多的应用。三维有限元模型一般采用分层网格建立 6 节点或 8 节点等参单元。有限元的积分方程就是在网格单元的基础上近似求解的。

首先讨论平面三角形单元，见图 4.9。单元 e 的三个顶点编号按照逆时针顺序分别为 i, j, k，水头在单元内任意坐标点(x, y)的分布特征采用线性插值函数进行近似描述

$$H(x,y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \tag{4.3.4}$$

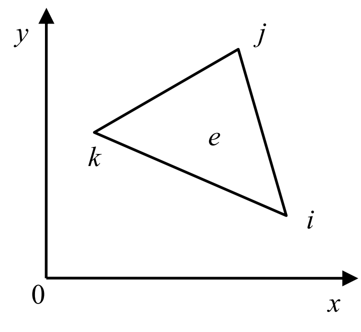


图 4.9 三角形单元及其顶点编号

式中：β_1、β_2、β_3 是几何系数。把节点 i, j, k 处的坐标和水头代入式(4.3.4)得到

$$\beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 y_i = H_i \tag{4.3.5}$$

$$\beta_1 + \beta_2 x_j + \beta_3 y_j = H_j \tag{4.3.6}$$

$$\beta_1 + \beta_2 x_k + \beta_3 y_k = H_k \tag{4.3.7}$$

这是线性方程组，求解得到

$$\beta_1 = \frac{1}{2A_e}(a_i H_i + a_j H_j + a_k H_k) \tag{4.3.8}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2A_e}(b_i H_i + b_j H_j + b_k H_k) \tag{4.3.9}$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2A_e}(c_i H_i + c_j H_j + c_k H_k) \tag{4.3.10}$$

其中：

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j \text{；} \ a_j = x_k y_i - x_i y_k \text{；} \ a_k = x_i y_j - x_j y_i \tag{4.3.11}$$

$$b_i = y_j - y_k \text{；} \ b_j = y_k - y_i \text{；} \ b_k = y_i - y_j \tag{4.3.12}$$

$$c_i = x_k - x_j \text{；} \ c_j = x_i - x_k \text{；} \ c_k = x_j - x_i \tag{4.3.13}$$

$$A_e = (b_i c_j - c_i b_j) \tag{4.3.14}$$

式中：A_e 是三角形单元的面积。将式(4.3.8)~ (4.3.10)代入(4.3.4)，则插值函数可改写为

$$H(x,y) = H_i N_i(x,y) + H_j N_j(x,y) + H_k N_k(x,y) \tag{4.3.15}$$

其中

$$N_p(x,y) = \frac{1}{2A_e}(a_p + b_p x + c_p y)\text{，} \ p=i,\ j,\ k \tag{4.3.16}$$

是节点 i, j, k 在单元 e 内的形函数。对于固定坐标点(x, y)，形函数具有以下的性质

$$N_i^e + N_j^e + N_k^e = 1 \tag{4.3.17}$$

式中：上标 e 表示求和只能在同一三角形单元 e 内进行。当所有节点的水头已知时，就可以把形函数代入(4.3.15)计算三角形单元内任意坐标位置的水头。

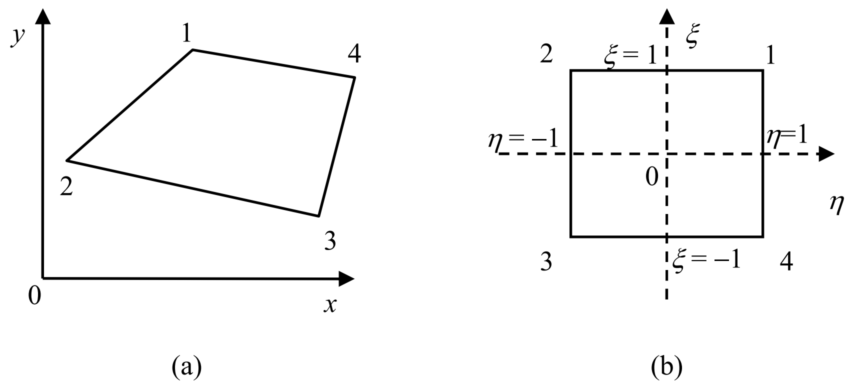


图 4.10 任意四边形单元的坐标变换

四边形单元也可以采用类似的方法建立插值函数和形函数，但是在形式上复杂一些。首先，任意的四边形都可以影射为一个正方形，如图 4.10(a)中(x, y)坐标系下的四边形 1-2-3-4，可通过坐标变换，形成图 4.10(b)中$(\eta,\ \xi)$坐标系下的正方形 1-2-3-4。这个正方形单元被称为等参单元，其形函数定义如下

$$N_i(\eta,\xi)=\frac{1}{4}(1+\eta_i\eta)(1+\xi_i\xi)\,,\quad i=1,2,3,4 \tag{4.3.18}$$

式中：$(\eta_i,\ \xi_i)$为节点 i 的影射坐标。等参单元内的任意一点$(\eta,\ \xi)$，通过上述形函数与实际四边形单元内的对应坐标点建立如下关系

$$x=\sum_{i=1}^{4}x_iN_i(\eta,\xi)\,,\quad y=\sum_{i=1}^{4}y_iN_i(\eta,\xi) \tag{4.3.19}$$

式中：x_i、y_i 是节点 i 的实际坐标。因此，等参单元内形函数与实际单元形函数具有一一对应的关系：

$$N_i(\eta,\xi)\leftrightarrow N_i(x,y) \tag{4.3.20}$$

而等参单元内的任意一点$(\eta,\ \xi)$的水头，也可以通过形函数变换为实际坐标系下(x, y)处的水头

$$H(\eta,\xi)=H(x,y)=\sum_{i=1}^{4}H_iN_i(\eta,\xi)=\sum_{i=1}^{4}H_iN_i(x,y) \tag{4.3.21}$$

在建立有限元方程时，需要用到以下类型的偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\sum_{i=1}^{4}f_i\frac{\partial N_i(\eta,\xi)}{\partial x} \tag{4.3.22}$$

$$\frac{\partial N_i(\eta,\xi)}{\partial x}=\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{4.3.23}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}=\frac{1}{4}\eta_i(1+\xi_i\xi)\,,\quad \frac{\partial N_i}{\partial \xi}=\frac{1}{4}\xi_i(1+\eta_i\eta) \tag{4.3.24}$$

二、 基于三角形单元的地下水流有限元方程

对于三角形网格中的一个节点 p，如图 4.11，建立有限元方程的积分区域包括了与 p 点相邻

的所有节点 p-1、p-2 等，即以 p 点为共同顶点的所有三角形单元所覆盖的区域。积分采用分片法，即在相邻的三角形单元内分别积分，然后求总和，得到对应 p 点的有限元方程。

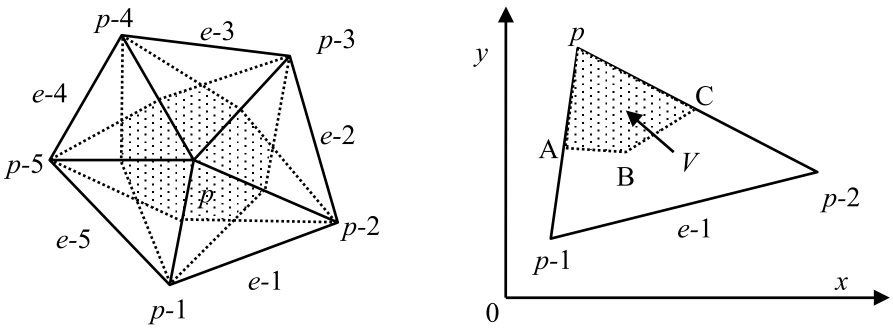


图 4.11　三角形网格中的节点及其水均衡控制区(阴影部分)

通过建立有限元网格节点的水均衡控制区，采用水量均衡原理，也可推导出地下水流的有限元方程，与积分法得到的结果相同。这种推导方式更加清楚的反映了地下水流的物理机制。如图 4.11，节点 p 的水均衡控制区是一系列三角形重心与侧边中点的连线所围成的区域，每个三角形单元中，属于节点 p 水均衡控制区的面积是其单元面积的 1/3。因此，节点 p 水均衡控制区的总面积为

$$A_p = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N_p} A_{e-n} \tag{4.3.25}$$

式中：e-n 表示第 n 个相邻三角形单元的整体编号；A_{e-n} 是其面积。

地下水通过控制区周边流入控制区内的侧向流量 Q_H，可以用流速在控制区边界线上的线积分得到

$$Q_H^p = m\oint_S (V \cdot n)dS = m\oint_S [V_x \cos(n,x) + V_y \cos(n,y)]dS \tag{4.3.26}$$

式中：V 为流速向量，n 表示边界线 S 上微分线段 dS 的内法线矢量；V_x 和 V_y 分别为 x 方向和 y 方向的流速分量；m 为含水层的厚度。设渗透系数的主轴与坐标轴一致，则流速向量可根据达西定律获取

$$V_x = -K_x \frac{\partial H}{\partial x}\text{；}\ V_x = -K_y \frac{\partial H}{\partial y} \tag{4.3.27}$$

代入式(4.3.26)有

$$Q_H^p = -m\oint_S \left[K_x \frac{\partial H}{\partial x}\cos(n,x)\right]dS - m\oint_S \left[K_y \frac{\partial H}{\partial y}\cos(n,y)\right]dS \tag{4.3.28}$$

确定上述积分的方法是在节点 p 相邻的三角形单元内分别计算，然后求总和，即

$$Q_H^p = \sum_{n=1}^{N_p} Q_H^{e-n} \tag{4.3.29}$$

其中，每个三角形单元 e-n 流量贡献为

$$Q_H^{e-n} = -\left[K_x m \oint_{S-n} \frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_{e-n} \cos(n,x) dS\right] - \left[K_y m \oint_{S-n} \frac{\partial H}{\partial y}\bigg|_{e-n} \cos(n,y) dS\right] \tag{4.3.30}$$

式中：*S-i* 表示在三角形单元 *e-i* 内的积分路径。以图 4.11 中的单元 *e*-1 为例，节点 *p* 控制区在该单元内的积分路径为 A-B-C，其中 A 为点 *p* 和点 *p*-1 连线的中点，B 为点 *p* 和点 *p*-2 连线的中点，C 为单元 *e*-1 的重心。

根据三角形单元内水头的插值函数式(4.3.15)，有

$$\frac{\partial H}{\partial x} = H_p \frac{\partial N_p}{\partial x} + H_{p-1} \frac{\partial N_{p-1}}{\partial x} + H_{p-2} \frac{\partial N_{p-2}}{\partial x} \tag{4.3.31}$$

根据式(4.3.16)，得到

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{2A_{e-1}} (H_p b_p + H_{p-1} b_{p-1} + H_{p-2} b_{p-2}) \tag{4.3.32}$$

同理有

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{2A_{e-1}} (H_p c_p + H_{p-1} c_{p-1} + H_{p-2} c_{p-2}) \tag{4.3.33}$$

可见水力梯度在三角形单元内为一常量，可以提取到式(4.3.30)的积分号外部，即

$$Q_H^{e-1} = -\left[\frac{K_x m}{2A_{e-1}} (H_p b_p + H_{p-1} b_{p-1} + H_{p-2} b_{p-2}) \oint_{S-1} \cos(n,x) dS\right]$$

$$-\left[\frac{K_y m}{2A_{e-1}} (H_p c_p + H_{p-1} c_{p-1} + H_{p-2} c_{p-2}) \oint_{S-1} \cos(n,y) dS\right] \tag{4.3.34}$$

这样在线积分中只剩下了积分路径在 *x* 轴和 *y* 轴上的投影，有

$$\oint_{S-1} \cos(n,x) dS = y_A - y_C\text{，}\quad \oint_{S-1} \cos(n,y) dS = x_C - x_A \tag{4.3.35}$$

根据点 A 和 C 与单元 *e*-1 的三个顶点之间的关系，有

$$x_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}(x_p + x_{p-1})\text{，}\quad y_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}(y_p + y_{p-1}) \tag{4.3.36}$$

$$x_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}(x_p + x_{p-2})\text{，}\quad y_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}(y_p + y_{p-2}) \tag{4.3.37}$$

将上述关系式代入式(4.3.35)，得到

$$\oint_{S-1} \cos(n,x) dS = c_p\text{，}\quad \oint_{S-1} \cos(n,y) dS = -b_p \tag{4.3.38}$$

将上式代入式(4.3.34)，得到

$$Q_H^{e-1} = -\frac{(T_x b_p^2 + T_y m c_p^2)}{4A_{e-1}} H_p$$

$$-\frac{(T_x b_p b_{p-1} + T_y c_p c_{p-1})}{4A_{e-1}} H_{p-1} - \frac{(T_x b_p b_{p-2} + T_y c_p c_{p-2})}{4A_{e-1}} H_{p-2} \tag{4.3.39}$$

三角形单元 e-1 中的节点 p、节点 p-1 以及节点 p-2 分别是与图 4.9 中普遍单元 e 的顶点 i、j、k 之间相互对应，有了式(4.3.39)之后，引入如下的系数来反映单元 e 内节点与节点之间的关系

$$G_{p,L}^{e}=-\frac{T_x b_p^e b_L^e+T_y c_p^e c_L^e}{4A_e}\text{，} \ p\ =i,\ j,\ k,\ L=i,\ j,\ k \tag{4.3.40}$$

其中 $G_{p,L}$ 为节点 L 与节点 p 的控制区之间的关系。利用式(4.3.40)可以把式(4.3.39)改写为

$$Q_H^{e-1}=G_{p,p}^{e-1}H_p+G_{p,p-1}^{e-1}H_{p-1}+G_{p,p-2}^{e-1}H_{p-2} \tag{4.3.41}$$

代入式(4.3.29)得到流向节点 p 控制区的总侧向流量

$$Q_H^p=\sum_{n=1}^{N_p}(G_{p,p}^{e-n}H_p+G_{p,p-j}^{e-n}H_{p-j}+G_{p,p-k}^{e-n}H_{p-k}) \tag{4.3.42}$$

其中 p-j 和 p-k 分别表示沿着单元 e-i 从节点 p 逆时针移动遇到的第 1 个节点与第 2 个节点。

以图 4.11 中的节点 p 为例，展开式(4.3.42)，得到

$$Q_H^p=\left(\sum_{n=1}^{N_p}G_{p,p}^{e-n}\right)H_p+(G_{p,p-1}^{e-1}+G_{p,p-1}^{e-5})H_{p-1}+(G_{p,p-2}^{e-1}+G_{p,p-2}^{e-2})H_{p-2}$$

$$+(G_{p,p-3}^{e-2}+G_{p,p-3}^{e-3})H_{p-3}+(G_{p,p-4}^{e-3}+G_{p,p-4}^{e-4})H_{p-4}+(G_{p,p-5}^{e-4}+G_{p,p-5}^{e-5})H_{p-5} \tag{4.3.43}$$

在整体网格中，节点之间在各单元中的关联系数可以合并

$$G_{pL}=\sum_{e=1}^{E_{p,L}}G_{p,L}^{e} \tag{4.3.44}$$

式中：G_{pL} 表示节点 p 与节点 L 之间在整体网格上的关联系数；$E_{p,L}$ 表示共同拥有节点 p 和 L 的单元的数目。当 $E_{p,L}$ =0 时，G_{pL}=0，说明节点 p 和 L 之间没有直接关系。关联系数的重要特征是对称性：G_{pL}=G_{Lp}。运用式(4.3.44)，流向节点 p 控制区的侧向流量可表示为

$$Q_H^p=\sum_{L=1}^{N}G_{pL}H_L \tag{4.3.44}$$

式中：N 表示网格中的总节点数。

对于承压含水层，在时间步长Δt_k内，节点 p 控制区内水体积的增加量为

$$\Delta V_w=\iint_\Omega S[H_{x,y}^k-H_{x,y}^{k-1}]dxdy \tag{4.3.45}$$

式中：k 表示时步。标准的有限元法是把插值函数引入上述积分，并分别在相邻单元内积分再求和，导致ΔV_w 中包含全部相邻节点的水头变化信息。目前，地下水流有限元模型中，普遍采用贮量集中处理法，即用节点 p 的水头变化表示控制区的平均水头变化，有

$$\Delta V_w=SA_p(H_p^k-H_p^{k-1}) \tag{4.3.46}$$

其中，A_p 按照式(4.3.25)计算，这种简单的做法反而可以改善有限元的计算结果。根据水均衡原理，控制区水体积的增加与外部流量补给的水量相等，即

$$(Q_H^p + Q_a)\Delta t_k = \Delta V_w \tag{4.3.47}$$

式中：Q_a是其他外部补给流量。利用式(4.3.44)和式(4.3.46)，可以展开式(4.3.47)为

$$\left(\frac{SA_p}{\Delta t_k} - G_{pp}\right)H_p^k - \sum_{L=1,L\neq p}^{N} G_{pL}H_L^k = Q_a + \frac{SA_p}{\Delta t_k}H_p^{k-1} \tag{4.3.48}$$

这就是承压含水层模型中对应节点 p 的隐式有限元方程。

潜水含水层的隐式有限元方程可写为

$$\left(\frac{S_y A_p}{\Delta t_k} - G_{pp}\right)H_p^k - \sum_{L=1,L\neq p}^{N} G_{pL}H_L^k = Q_a + \frac{S_y A_p}{\Delta t_k}H_p^{k-1} \tag{4.3.49}$$

式中：S_y为给水度。关联系数 G_{pL} 中的导水系数 T_x、T_y与当前时刻的待求水头有关，因此属于非线性方程。

三、 三角形四边形混合单元地下水流有限元方程

对于三角形单元，已经通过式(4.3.40)得到了单元 e 内关联系数 G_{pL} 的表达式。在有限元模型中，对于任意的单元体，节点之间关联系数的积分形式为

$$G_{p,L}^e = \iint_e \left(T_x \frac{\partial N_p^e}{\partial x}\frac{\partial N_L^e}{\partial x} + T_y \frac{\partial N_p^e}{\partial y}\frac{\partial N_L^e}{\partial y}\right)dxdy \tag{4.3.50}$$

这个积分表达式对三角形单元同样是有效的。对于四边形单元，需要将上述积分转换到影射的等参单元上进行，利用以下性质

$$dxdy = |J|\, d\eta d\xi \tag{4.3.51}$$

其中$[J]$是坐标变换的 Jacob 矩阵，而$|J|$为其行列式，有

$$[J] = \begin{pmatrix} \partial x/\partial\eta & \partial y/\partial\eta \\ \partial x/\partial\xi & \partial y/\partial\xi \end{pmatrix} \tag{4.3.52}$$

并且

$$\begin{pmatrix} \partial N_L^e/\partial x \\ \partial N_L^e/\partial y \end{pmatrix} = [J]^{-1}\begin{pmatrix} \partial N_L^e/\partial\eta \\ \partial N_L^e/\partial\xi \end{pmatrix} \tag{4.3.53}$$

其中

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|}\begin{pmatrix} \partial y/\partial\xi & -\partial y/\partial\eta \\ -\partial x/\partial\xi & \partial x/\partial\eta \end{pmatrix} \tag{4.3.54}$$

而 x、y 对η、ξ的偏导数具有(4.3.22)的形式。

利用式(4.3.51)，积分式(4.3.50)可转变为

$$G_{p,L}^e = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(T_x \frac{\partial N_p^e}{\partial x}\frac{\partial N_L^e}{\partial x} + T_y \frac{\partial N_p^e}{\partial y}\frac{\partial N_L^e}{\partial y}\right)|J|\,d\eta d\xi \tag{4.3.55}$$

注意积分符号内的偏导数和$|J|$也是影射坐标(η, ξ)的函数。

上述积分可采用高斯积分公式进行计算：

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\eta,\xi)d\eta d\xi = \sum_{i=1,\,j=1}^{2,2} f(\eta_i,\xi_j) \tag{4.3.56}$$

其中，(η_i, ξ_i), i=1,2,3,4 为四个高斯积分点，并有

$$\eta_1 = \xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}；\ \eta_2 = \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{4.3.57}$$

在确定了单元内的节点关联系数之后，就可以利用式(4.3.44)组装整体关联系数。而贮水量部分仍然采用贮量集中处理法，节点 p 控制区在单元 e 内所占的面积为

$$A_p^e = \iint_e N_p^e dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_p^e\,|J|\,d\eta\xi \tag{4.3.58}$$

而节点 p 控制区的总面积是

$$A_p = \sum_{n=1}^{N_{e,p}} A_p^e \tag{4.3.59}$$

其中，$N_{e,p}$表示与 p 相邻的单元数。

最后可以得到承压含水层三角形四边形混合单元模型的有限元方程为

$$\sum_{L=1}^{N} G_{pL}H_L^k + Q_a = \frac{SA_p}{\Delta t_k}(H_p^k - H_p^{k-1})\text{，}\ p=1,2,\ldots,N \tag{4.3.60}$$

四、 地下水流有限元模型的井孔校正

与有限差分模型一样，地下水流有限元模型在遇到井孔时也需要进行校正。井孔的校正思路与有限差分模型中所采取的思路是相同的，即引入井孔附近的径向流解析解。在研究地下水流有限差分模型的井孔校正问题时，我们已经建立了矩形网格有限差分模型的校正公式，但是尚未对多边形网格有限差分模型进行推导。在本节中，我们将证明，在各向同性条件下，多边形网格有限差分模型与三角形网格有限元模型在某种程度上是等价的。因此，两者的井孔校正问题可以一起处理。

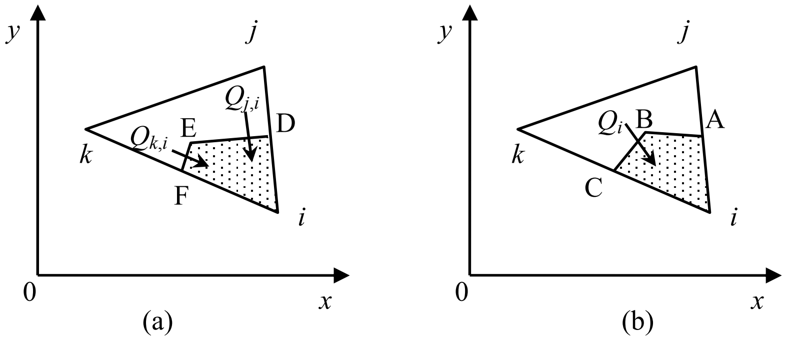


图 4.12 三角形单元的节点控制区：(*a*)有限差分模型; (*b*)有限元模型

如图 4.12 所示，根据前述模型的建立过程，三角形单元所覆盖的区域分别属于三个顶点的水均衡控制区。在有限差分模型中，节点控制区由三角形边线的中垂线 D-E-F 围成，而在有限元模型中，节点控制区由三角形边线中点与重心的连线 A-B-C 围成。

在有限差分模型中，流向节点 i 控制区的流量由 $Q_{j,i}$ 和 $Q_{k,i}$ 两部分组成，$Q_{j,i}$ 是经过断面 D-E 流入的，而 $Q_{k,i}$ 是经过断面 E-F 流入的。两部分流入的总和为

$$Q_i = Q_{j,i} + Q_{k,i} = T\frac{\overline{DE}}{\overline{ij}}(H_j - H_i) + T\frac{\overline{EF}}{\overline{ik}}(H_k - H_i) \tag{4.3.61}$$

利用三角形中垂线的性质可以得到(陈崇希等, 1989)

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{ij}} = -\frac{b_i b_j + c_i c_j}{4A_e}, \quad \frac{\overline{EF}}{\overline{ik}} = -\frac{b_i b_k + c_i c_k}{4A_e} \tag{4.3.62}$$

式中：A_e 是单元的面积。将上述关系代入式(4.3.61)可得

$$Q_i = \frac{T[b_i(b_j + b_k) + c_i(c_j + c_k)]}{4A_e}H_i - \frac{T(b_i b_j + c_i c_j)}{4A_e}H_j - \frac{T(b_i b_k + c_i c_k)}{4A_e}H_k \tag{4.3.63}$$

在有限元模型中，流向节点 i 控制区的流量只要把式(4.3.39)改写为以下形式即可

$$Q_i = -\frac{T(b_i^2 + c_i^2)}{4A_e}H_i - \frac{T(b_i b_j + c_i c_j)}{4A_e}H_j - \frac{T(b_i b_k + c_i c_k)}{4A_e}H_k \tag{4.3.64}$$

比较式(4.3.63)和(4.3.64)可以发现，两者的后 2 项（关于 H_j 和 H_k）完全相同，只有与 H_i 的相乘的系数在形式上有所不同，但实际上也是相同的。利用式(4.3.12)和式(4.3.13)给出的关系，很容易证明

$$b_j + b_k = -b_i, \quad c_j + c_k = -c_i \tag{4.3.65}$$

因此式(4.3.63)和式(4.3.64)给出的结果是完全一样的。这说明无论有限差分模型还是有限元模型，计算得到的侧向流量相同，在这一点上，它们是等价的。然而，它们又不是完全等价的，因为它们计算的控制区面积可能不同，只有在图 4.12 中点 B 和点 E 重合时，两者计算的控制区面积才完全相同。

上述等价性质导致多边形网格有限差分模型的差分方程和三角形网格有限元模型的有限元

方程具有相同的形式，都可以写为

$$G_{pp}H_p^k+\sum_{i=1}^{N_p}G_{p,L-i}H_{L-i}^k+Q_a=\frac{SA_p}{\Delta t_k}(H_p^k-H_p^{k-1}) \tag{4.3.66}$$

式中：G_{pp} 和 G_{pL} 是由式(4.3.44)得到的关联系数；$L\text{-}i$ 表示与节点 p 相邻的第 i 个节点；N_p 是与 p 相邻的节点总数；Q_a 为其他外部补给流量；A_p 是节点水均衡控制区的面积；k 为时步。需要注意的是，式(4.3.66)运用了贮量集中处理的有限元法。对于关联系数，可以证明

$$G_{pp}=-\sum_{i=1}^{N_p}G_{p,L-i}H_{L-i}^k \tag{4.3.67}$$

当 p 点存在抽水井时，常规的有限元法是直接把井流量加入到方程的 Q_a 之中，同样导致“算不准”问题，需要校正。不妨把方程(4.3.66)中的 Q_a 表示为

$$Q_a=-Q_w+\varphi_p A_p \tag{4.3.68}$$

式中：Q_w 为井孔排泄地下水的流量；φ是其他面源的补给强度。进一步把方程(4.3.66)写成以下的形式

$$G_{pp}H_p^k+\sum_{i=1}^{N_p}G_{p,L-i}H_{L-i}^k=Q_w-\varepsilon A_p \tag{4.3.69}$$

其中ε-因子定义为

$$\varepsilon=\varphi_p+\frac{S}{\Delta t_k}(H_p^k-H_p^{k-1}) \tag{4.3.70}$$

引入井孔附近的解析解，即式(4.2.54)，可得到

$$H_{L-i}^k=H_w^k+\frac{Q_w}{2\pi T}\ln\frac{r_{L-i}}{r_w}-\frac{\varepsilon}{4T}r_{L-i}^2 \tag{4.3.71}$$

式中：$r_{L\text{-}i}$ 是节点 $L\text{-}i$ 与节点 p 的距离。将式(4.3.71)代入式(4.3.68)，得到

$$A(H_p^k-H_w^k)+\frac{B}{T}Q_w-\frac{\varepsilon}{T}E=\frac{Q_w-\varepsilon A_p}{T} \tag{4.3.72}$$

其中 A、B、E 这 3 个系数分别为

$$A=\frac{G_{pp}}{T},\quad B=\sum_{i=1}^{N_p}\frac{G_{p,L-i}}{2\pi T}\ln\frac{r_{L-i}}{r_w},\quad E=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N_p}\frac{G_{p,L-i}}{T}r_{L-i}^2 \tag{4.3.73}$$

可以证明，在井孔附近均质各向同性的条件下，它们实际上与导水系数 T 无关。这是因为，关联系数在计算时已经包含了导水系数，见式(4.3.64)或式(4.3.40)，当关联系数再除以 T 时，导水系数在 A、B、E 中被消去了。因此，这 3 个系数只是取决于模型网格几何信息的常数。如果引入图 4.4 中的 w_i 和 L_i 表示网格的几何信息，L_i=$r_{L\text{-}i}$ 为节点 $L\text{-}i$ 与节点 p 的距离，w_i 为两者连线的中垂线宽度，则有

$$G_{p,L-i}=T\frac{w_i}{r_{L-i}} \tag{4.3.74}$$

于是上述 3 个几何因子可另外表示为

$$A=\sum_{i=1}^{N_p}\frac{w_i}{r_{L-i}},\ \ B=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N_p}\frac{w_i}{r_{L-i}}\ln\left(\frac{r_{L-i}}{r_w}\right),\ \ E=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N_p}(w_i r_{L-i}) \tag{4.3.75}$$

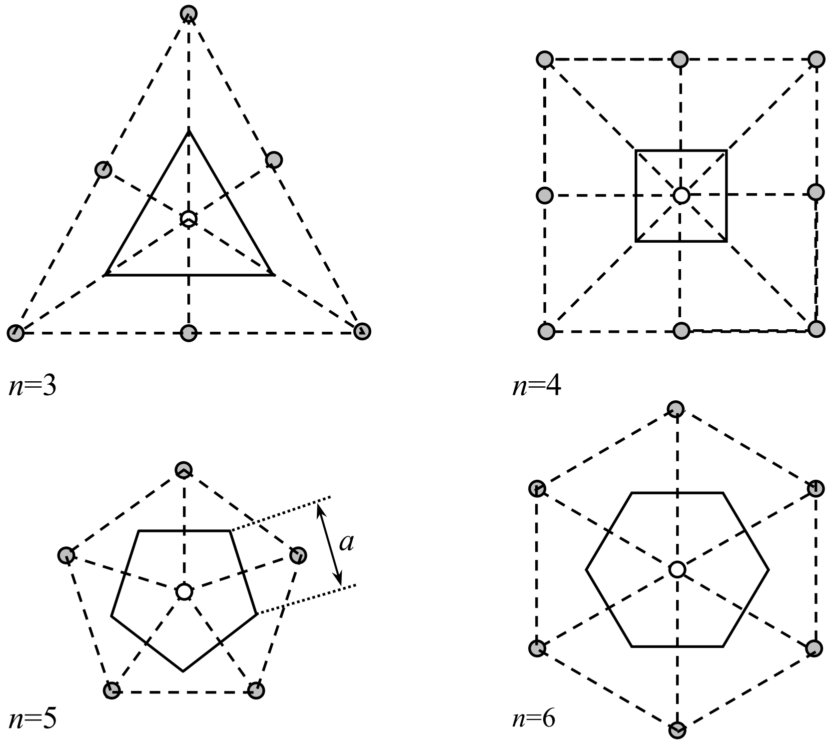


图 4.13 具有正 n 边形特征的节点控制区

由式(4.3.72)可以得到井孔的校正公式

$$Q_w=\frac{A}{B-1}T(H_p^k-H_w^k)-\varepsilon\frac{E-A_p}{B-1} \tag{4.3.76}$$

当节点的水均衡控制区为正多边形时，几何因子 E 与控制区的面积 A_p 往往相等，从而在式(4.3.76)中消去ε-因子的影响。图 4.13 给出了有限差分模型中节点控制区为正多边形的例子，设正多边形的顶点数为 n、边长为 a，则

$$w_i=a,\ \ r_{L-i}=a/tg\left(\frac{\pi}{n}\right) \tag{4.3.77}$$

$$A=ntg(\pi/n),\ \ B=\frac{A}{2\pi}\ln\left[\frac{a}{r_w tg(\pi/n)}\right],\ \ E=A_p=\frac{1}{4}na^2tg(\pi/n) \tag{4.3.78}$$

而校正公式可简化为

$$
Q_w = \frac{2\pi T(H_p^k - H_w^k)}{\ln(r_{eq}/r_w)} \tag{4.3.79}
$$

其中等效半径

$$
r_{eq} = \frac{a}{tg(\pi/n)} \exp^{-1}\left[\frac{2\pi}{ntg(\pi/n)}\right] \tag{4.3.80}
$$

当 n=3, 4, 5, 6 时分别得到

n=3, r_{eq}=0.172 a； n=4, r_{eq}=0.208 a； n=5, r_{eq}=0.244 a； n=6, r_{eq}=0.282 a

其中，当 n=5 和 n=6 时的等效半径适用于有限元模型。这些结果为在多边形网格有限差分模型和有限元模型中模拟含水层-井孔系统水流问题提供了简单的校正方法。

五、 控制条件刻画及方程组的求解

有限元模型对边界条件的处理基本上与基于多边形网格的有限差分法相同，在此不赘述。对于越流条件，把越流补给项加入到有限元方程中，则式(4.3.66)可更新为

$$
G_{pp}H_p^k + \sum_{i=1}^{N_p} G_{p,L-i}H_{L-i}^k + \frac{K_c A_p}{m_c}(H_c - H_p^k) + Q_a = \frac{SA_p}{\Delta t_k}(H_p^k - H_p^{k-1}) \tag{4.3.81}
$$

式中：K_c 和 m_c 分别为弱透水层的垂向渗透系数和厚度；H_c 是作为补给源的含水层的水头；A_p 为节点-p 控制区的面积。

把考虑各种条件的节点有限元方程汇总之后，可以形成形如(4.3.66)的线性方程组，并采用直接法或迭代法进行求解。

第四节 地下水流边界元模型

边界元法(Boundary Element Method)又称为边界积分方程法，自 20 世纪 70 年代产生之后，在地下水流数值模拟领域有所应用。其基本思路是利用格林(Green)公式和偏微分方程的格林函数，把地下水流问题转化为边界积分方程组的求解问题。

边界元法与有限差分法和有限元法的显著差异，是不必在模型区域内部布置离散点，而只需要将模型的边界离散化，在求解出边界节点的水头和水力梯度之后，就可以用边界积分方程计算出区域内任一点的水头。

一、 格林公式与边界积分方程

对于在平面区域 Ω 内定义的一阶连续函数 $P(x, y)$和 $Q(x, y)$，满足格林定律

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{B}[P\cos(n,x)+Q\cos(n,x)]ds \tag{4.4.1}$$

式中：B 代表区域Ω 的边界；n 为边界的外法线方向。格林函数说明了平面二重积分与边界积分之间的关系。如果函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$与一阶连续函数 $G(x,y)$、$H(x,y)$之间存在如下关系

$$P=G\frac{\partial H}{\partial x}；\ Q=G\frac{\partial H}{\partial y} \tag{4.4.2}$$

则可以通过格林定律推导得到第一格林公式

$$\iint_{\Omega}G\nabla^2 Hdxdy=\oint_{B}G\frac{\partial H}{\partial n}ds-\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y}\right]dxdy \tag{4.4.3}$$

式中：∇^2 为 Laplace 算子。另外还可以推导出第二格林公式

$$\iint_{\Omega}[G\nabla^2 H-H\nabla^2 G]dxdy=\oint_{B}\left[G\frac{\partial H}{\partial n}-H\frac{\partial G}{\partial n}\right]ds \tag{4.4.4}$$

这两个格林公式是建立边界元方法的基础。

设区域Ω 内有均质各向同性的承压含水层，其地下水的稳定流偏微分方程为

$$T\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)+\varphi(x,y)=0 \tag{4.4.5}$$

式中：$\varphi(x,y)$是源汇项。式(4.4.5)可进一步表示为

$$\nabla^2 H=-\frac{\varphi(x,y)}{T} \tag{4.4.6}$$

把上式代入第二格林公式有

$$-\iint_{\Omega}G\frac{\varphi(x,y)}{T}dxdy-\iint_{\Omega}H\nabla^2 Gdxdy=\oint_{B}\left[G\frac{\partial H}{\partial n}-H\frac{\partial G}{\partial n}\right]ds \tag{4.4.7}$$

进一步转化为

$$\iint_{\Omega}H\nabla^2 Gdxdy=\oint_{B}\left[H\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial H}{\partial n}\right]ds-\iint_{\Omega}G\frac{\varphi(x,y)}{T}dxdy \tag{4.4.8}$$

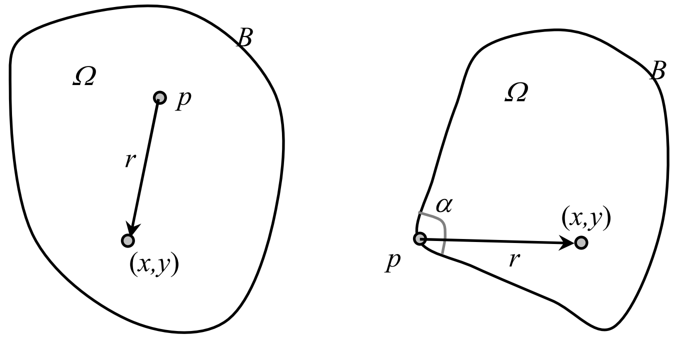


图 4.14　模型区域内点和边界点

现在研究区域内固定点 p 的情况（图 4.14），以该点为中心建立极坐标系，定义格林函数

$$G(x,y)=G(r)=\ln r \tag{4.4.9}$$

它满足

$$\nabla^2 G=\delta(r) \tag{4.4.10}$$

其中，$\delta(r)$为 Dirack 函数。同时引入过渡函数

$$f(r,\theta)=H\nabla^2 G=H_p\delta(r) \tag{4.4.11}$$

式中：θ为极坐标系下的辐角；H_p为 p 点的水头。于是可以得到

$$\iint_\Omega H\nabla^2 G dxdy=\int_0^{2\pi}\left[\lim_{r\to 0}\int_0^r f(r,\theta)dr\right]d\theta \tag{4.4.12}$$

利用 Dirack 函数的性质，上述积分可计算为

$$\iint_\Omega H\nabla^2 G dxdy=\int_0^{2\pi}H_p d\theta=2\pi H_p \tag{4.4.13}$$

把式(4.4.13)代入式(4.4.8)可得

$$2\pi H_p=\oint_B\left[H\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial H}{\partial n}\right]ds-\iint_\Omega G\frac{\varphi(x,y)}{T}dxdy \tag{4.4.14}$$

这就是内点的积分方程。

当 p 点位于区域边界上时（图 4.14），如果边界是光滑的，则式(4.4.13)中的积分范围只能是边界切线的内侧，因此

$$\pi H_p=\oint_B\left[H\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial H}{\partial n}\right]ds-\iint_\Omega G\frac{\varphi(x,y)}{T}dxdy \tag{4.4.15}$$

如果 p 点刚好是一个折线交点，内夹角为α，则

$$\alpha_p H_p=\oint_B\left[H\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial H}{\partial n}\right]ds-\iint_\Omega G\frac{\varphi(x,y)}{T}dxdy \tag{4.4.16}$$

上式即为边界点的积分方程。

二、 地下水稳定流的边界元方程

将模型区域离散化为一系列边界节点和线段，外边界顺时针编号，内边界逆时针编号，如图 4.15。其中，每 2 个节点之间的线段即为边界元。边界节点的性质有两种：已知水头边界；已知水力梯度边界。令

$$J=\frac{\partial H}{\partial n},\ U=\frac{\partial G}{\partial n} \tag{4.4.17}$$

则任意边界节点 p 的积分方程可离散化表示为

$$\alpha_p H_p=\sum_{e=1}^{N}\int_{B-e}(HU_p-G_pJ)ds-\iint_\Omega G_p\frac{\varphi(x,y)}{T}dxdy \tag{4.4.18}$$

式中：e 表示边界元的序号；N 是边界元的数目；B-e 为边界元 e 对应的线段。

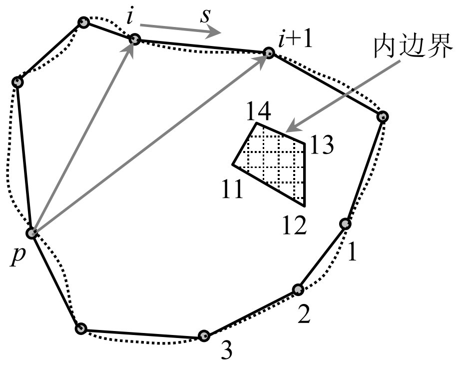


图 4.15　边界元模型的离散化方式

设边界元 e 的起点为 i、终点为 i+1，它们的距离为 $D_{i,i+1}$。沿着边界元从 i 点向 i+1 点方向移动的距离定义为 s，则可以利用向量几何关系建立以下函数（水头和水力梯度采用线性插值）

$$H(s)=H_i+\frac{H_{i+1}-H_i}{D_{i,i+1}}s\,,\quad J(s)=J_i+\frac{J_{i+1}-J_i}{D_{i,i+1}}s \tag{4.4.20}$$

$$G_p(s)=\frac{1}{2}\ln r^2\,,\ \ U_p(s)=\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{L}{r^2} \tag{4.4.21}$$

$$r^2=(s+s_0)^2+L^2\,,\ \ D_{i,j+1}=\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2} \tag{4.4.22}$$

$$L=\frac{x_{i+1}-x_i}{D_{i,i+1}}(y_i-y_p)-\frac{y_{i+1}-y_i}{D_{i,i+1}}(x_i-x_p) \tag{4.4.23}$$

$$s_0=\frac{x_{i+1}-x_i}{D_{i,i+1}}(x_i-x_p)+\frac{y_{i+1}-y_i}{D_{i,i+1}}(y_i-y_p) \tag{4.4.24}$$

这些函数关系用来计算式(4.4.18)中的积分

$$\int_{B-e}(HU_p-G_pJ)ds=\int_0^{D_{i,i+1}}H(s)U_p(s)ds-\int_0^{D_{i,i+1}}G_p(s)J(s)ds \tag{4.4.25}$$

把式(4.4.20)~式(4.4.24)代入式(4.4.25)，得到积分的具体表达式

$$\int_{B-e}(HU_p-G_pJ)ds=\int_0^{D_{i,i+1}}\left(H_i+\frac{H_{i+1}-H_i}{D_{i,i+1}}s\right)\frac{L}{(s+s_0)^2+L^2}ds$$

$$-\int_0^{D_{i,i+1}}\frac{1}{2}\ln[(s+s_0)^2+L^2]\left(J_i+\frac{J_{i+1}-J_i}{D_{i,i+1}}s\right)ds \tag{4.4.26}$$

引入以下定积分记号

$$I_{11}^{B-e}=\frac{L}{D_{i,i+1}}\int_0^{D_{i,j+1}}\frac{sds}{(s+s_0)^2+L^2} \tag{4.4.27}$$

$$I_{12}^{B-e}=\frac{L}{D_{i,i+1}}\int_0^{D_{i,j+1}}\frac{ds}{(s+s_0)^2+L^2} \tag{4.4.28}$$

$$I_{21}^{B-e}=\frac{1}{D_{i,i+1}}\int_0^{D_{i,i+1}}\frac{s}{2}\ln[(s+s_0)^2+L^2]ds \tag{4.4.29}$$

$$I_{22}^{B-e}=\frac{1}{D_{i,i+1}}\int_0^{D_{i,i+1}}\frac{1}{2}\ln[(s+s_0)^2+L^2]ds \tag{4.4.30}$$

则式(4.4.26)可以转变为

$$\int_{B-e}(HU_p-G_pJ)ds=(D_{i,i+1}I_{12}^{B-e}-I_{11}^{B-e})H_i+I_{11}^{B-e}H_{i+1}$$

$$-(D_{i,i+1}I_{22}^{B-e}-I_{21}^{B-e})J_i-I_{21}^{B-e}J_{i+1} \tag{4.4.31}$$

其中 4 个定积分的计算公式如下

$$I_{11}^{B-e}=\frac{L}{2D_{i,i+1}}\ln\frac{(D_{i,i+1}+s_0)^2+L^2}{s_0^2+L^2},\quad L\neq 0;\quad I_{11}^{B-e}=0,\ L=0; \tag{4.4.32}$$

$$I_{12}^{B-e}=\frac{1}{D_{i,i+1}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{D_{i,i+1}+s_0}{L}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{s_0}{L}\right)\right],\quad L\neq 0;\quad I_{12}^{B-e}=0,\ L=0; \tag{4.4.33}$$

$$I_{21}^{B-e}=\frac{[(D_{i,i+1}+s_0)^2+L^2]\left[\ln\left((D_{i,i+1}+s_0)^2+L^2\right)-1\right]-(s_0^2+L^2)[\ln(s_0^2+L^2)-1]}{4D_{i.i+1}} \tag{4.4.34}$$

$$I_{22}^{B-e}=\frac{(D_{i,i+1}+s_0)\ln[(D_{i,i+1}+s_0)^2+L^2]-s_0\ln(s_0^2+L^2)}{2D_{i.i+1}}+I_{12}^{B-e}L-1 \tag{4.4.35}$$

当 B-e 中包含节点 p 时，注意运用以下极限

$$\lim_{x\to 0}x\ln x=0$$

把式(4.4.31)代入式(4.4.18)得到

$$\alpha_pH_p=\sum_{e=1}^{N}[(D_{i,i+1}I_{12}^{B-e}-I_{11}^{B-e})H_i+I_{11}^{B-e}H_{i+1}-(D_{i,i+1}I_{22}^{B-e}-I_{21}^{B-e})J_i-I_{21}^{B-e}J_{i+1}]$$

$$-\iint_{\Omega}G_p\frac{\varphi(x,y)}{T}dxdy \tag{4.4.36}$$

这就是地下水稳定流对应节点 p 的边界元方程。对每个节点 p 都可以建立一个边界元方程，该节点的待求变量或为 H_p，或为 J_p，因此待求变量总数与边界元方程的总数相等，有唯一解。

三、 地下水非稳定流的边界元方程

设区域Ω 内有均质各向同性的第一类越流系统含水层，其地下水的非稳定流偏微分方程为

$$\left(\frac{\partial^2H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2H}{\partial y^2}\right)+\frac{\varphi(x,y)}{T}+\frac{H_c-H}{B^2}=\frac{S}{T}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{4.4.37}$$

式中：$\varphi(x, y)$是源汇项；B 为越流因子。

对于这种非稳定流问题，可以用 Laplace 变换法解决。其思路是：将非稳定流偏微分方程通过 Laplace 变换消去时间偏导数，然后采用稳定流边界元方程求解，但所适用的格林函数与式(4.4.9)不同，最后通过 Laplace 逆变换得到非稳定流的近似解。然而，Laplace 变换的逆变换比较复杂，削弱了这种方法的实用性。

另外一种方法是先对时间偏导数进行差分近似，再采用类似稳定流的边界元模型分时步计算离散时刻的水头分布。采用隐式差分格式，方程(4.4.37)变为

$$\left(\frac{\partial^2 H^k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H^k}{\partial y^2}\right)+\frac{\varphi(x,y)}{T}+\frac{H_c-H^k}{B^2}=\frac{S}{T}\frac{H^k-H^{k-1}}{\Delta t_k} \tag{4.4.38}$$

在 H^k 中略去上标 k，并把上式进一步转化为

$$\nabla^2 H=C_h^2 H-\frac{\varepsilon(x,y)}{T} \tag{4.4.39}$$

其中，

$$C_h=\sqrt{\frac{1}{B^2}+\frac{S}{T}}\ ,\varepsilon(x,y)=\varphi(x,y)+\frac{TH_c}{B^2}+S\frac{H^{k-1}}{\Delta t_k} \tag{4.4.40}$$

把式(4.4.39)代入第二格林公式，得到

$$\iint_{\Omega} H(\nabla^2 G-C_h^2 G)dxdy=\oint_B\left[H\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial H}{\partial n}\right]ds-\iint_{\Omega} G\frac{\varepsilon(x,y)}{T}dxdy \tag{4.4.41}$$

对研究区域内固定点 p，以该点为中心建立极坐标系，引入格林函数 G 及过渡函数 $f(r, \theta)$如下

$$G(x,y)=G(r)=-K_0(C_h r)\text{，}\quad f(r,\theta)=H(\nabla^2 G-C_h^2 G) \tag{4.4.42}$$

其中，K_0 为零阶第二类变形 Bessel 函数。可以证明过渡函数为

$$f(r,\theta)=H_p\delta(r) \tag{4.4.43}$$

于是有

$$\iint_{\Omega} H(\nabla^2 G-C_h^2 G)dxdy=\int_0^{2\pi}\left[\lim_{r\to 0}\int_0^r H_p\delta(r)dr\right]d\theta=2\pi H_p \tag{4.4.44}$$

将其代入式(4.4.41)得到

$$2\pi H_p=\oint_B\left[H\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial H}{\partial n}\right]ds-\iint_{\Omega} G\frac{\varepsilon(x,y)}{T}dxdy \tag{4.4.45}$$

这一方程与式(4.4.14)在形式上相同，但采用的格林函数 G 不同。同理可得形式上相同的边界积分方程。

下面再采用与图 4.15 相同的方式建立非稳定流的离散元模型。定义以下函数（水头和水力梯度采用线性插值）

$$H(s)=H_i+\frac{H_{i+1}-H_i}{D_{i,i+1}}s\text{，}\quad J(s)=J_i+\frac{J_{i+1}-J_i}{D_{i,i+1}}s \tag{4.4.46}$$

$$G_p(s)=-K_0(C_h r)\text{，}\ U_p(s)=\frac{\partial G}{\partial n}=C_h K_1(C_h r)\frac{L}{r} \tag{4.4.47}$$

而 r、s_0、L 的计算式与式(4.4.22)~式(4.4.24)相同。引入以下定积分记号

$$I_{11}^{B-e}=\frac{C_h L}{D_{i,i+1}}\int_0^{D_{i,j+1}}\frac{sK_1(C_h r)ds}{\sqrt{(s+s_0)^2+L^2}} \tag{4.4.48}$$

$$I_{12}^{B-e}=\frac{C_h L}{D_{i,i+1}}\int_0^{D_{i,j+1}}\frac{K_1(C_h r)ds}{(s+s_0)^2+L^2} \tag{4.4.49}$$

$$I_{21}^{B-e}=\frac{1}{D_{i,i+1}}\int_0^{D_{i,i+1}}sK_0(C_h\sqrt{(s+s_0)^2+L^2})ds \tag{4.4.50}$$

$$I_{22}^{B-e}=\frac{1}{D_{i,i+1}}\int_0^{D_{i,i+1}}K_0(C_h\sqrt{(s+s_0)^2+L^2})ds \tag{4.4.51}$$

则节点 p 的边界元方程可写为

$$\alpha_p H_p=\sum_{e=1}^{N}[(D_{i,i+1}I_{12}^{B-e}-I_{11}^{B-e})H_i+I_{11}^{B-e}H_{i+1}+(D_{i,i+1}I_{22}^{B-e}-I_{21}^{B-e})J_i+I_{21}^{B-e}J_{i+1}]$$
$$-\iint_\Omega G_p\frac{\varepsilon(x,y)}{T}dxdy \tag{4.4.52}$$

需要说明的是，方程中 J_i 和 J_{i+1} 的系数项符号与式(4.4.36)相反。对每个节点 p 都可以建立一个边界元方程，该节点的待求变量或为 H_p，或为 J_p，因此待求变量总数与边界元方程的总数相等，有唯一解。在转入下一个时步时，边界积分方程中的各项系数并不变，但函数$\varepsilon(x, y)$将发生变化。

四、 源汇项的处理

在稳定流边界元方程(4.4.36)和非稳定流边界元方程(4.4.52)中，都含有源汇项部分

$$\iint_\Omega G_p\frac{\varphi(x,y)}{T}dxdy\text{；}\quad \iint_\Omega G_p\frac{\varepsilon(x,y)}{T}dxdy \tag{4.4.53}$$

这部分积分的计算仍然需要采用离散化网格，如三角形网格，进行数值积分运算。因此，含有源汇项的地下水流问题，虽然渗流矩阵的建立只要进行边界离散化即可，但面源补给项的计算却难以避免使用模型区域内部的离散化网格。

井孔也是地下水流重要的源汇项，需要在有限元模型中加以处理。对于已知流量的井孔，设其坐标位置为(x_w, y_w)，半径为 r_w，抽水流量为 Q_w，则这一井孔形成的补给强度可表示为

$$\varphi_w(x,y)=\begin{cases}-Q_w/\pi r_w^2, & d\le r_w\\ 0, & d>r_w\end{cases} \tag{4.4.54}$$

其中，[公式(4.4.54)和(4.4.55)中的 *dis* 修改为 *d*]

$$d=\sqrt{(x-x_w)^2+(y-y_w)^2} \tag{4.4.55}$$

当井孔趋于无穷小时，井孔附近源汇项的积分可计算为

$$\iint_{\Omega} G_p \frac{\varphi_w(x,y)}{T} dxdy = -\lim_{r_w \to 0}\left[\int_0^{r_w}\int_0^{2\pi} G_p(r_p)\frac{Q_w}{\pi r_w^2 T} rdrd\theta\right] \tag{4.4.56}$$

式中：r 的起点为井点；θ 的起算方向是从点 p 指向井点坐标的方向。函数 G_p 重新表示为

$$G_p(r_p) = \ln(r_{p,w} + r\cos\theta) \tag{4.4.57}$$

式中：$r_{p,w}$ 为点 p 到井点的距离。运用极限分析可以得到

$$\iint_{\Omega} G_p \frac{\varphi_w(x,y)}{T} dxdy = -\frac{Q_w}{T} G_p(r_{p,w}) \tag{4.4.58}$$

因此，在边界元模型中，已知流量井孔形成的源汇项可以直接以(4.4.58)的形式加入到边界元方程中，不会增加边界元方程的数目。由于式(4.4.58)中并不包含井孔半径，因此在计算流场水头分布时，井孔半径并不是需要的参数。在这种情况下，如果直接调用式(4.4.14)计算井孔水头，由于井孔为奇点而无法进行。计算实际的进孔水位必须引入井孔半径，即计算距离井心半径为 r_w 处的水头，有

$$H_w = \frac{Q_w}{2\pi T}\ln r_w + \frac{1}{2\pi}\oint_B \left[H\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial H}{\partial n}\right] ds - \iint_{\Omega} G\frac{\varphi(x,y)}{2\pi T} dxdy \tag{4.4.59}$$

式中：$\varphi(x,y)$是除井孔之外的源汇项强度。

如果是已知水头的井孔，则需要把井孔流量 Q_w 作为待求变量，而式(4.4.59)中的 H_w 为已知变量。式(4.4.59)因此加入边界节点的积分方程组，一起求解。

第五节　地下水流数值模型的反演

当含水层的时空离散模型已经建立，边界条件和初始条件也得到处理之后，输入一定的含水层参数即能得到模型运行的结果。这种模拟过程被称为模型的正演。含水层的参数一般通过抽水试验等物理测试方法获取，这种方式得到的参数值在局部范围可能是准确可靠的，但未必适合大范围的条件。通过模型正演人们往往发现数值模拟的结果与野外观测的地下水位或径流量不一致，而改变了模型的参数值之后，结果有所改善。于是，模型参数的确定问题就成为数值模拟可靠性的关键。这种校正模型参数使模拟结果与观测结果保持一致的过程，就是模型反演，也被称为模型参数识别。

一、　地下水流的逆问题

地下水流场的动态演变过程除了边界条件、初始条件和各种水文关系之外，参数也是重要的控制因素。当其他条件相同时，参数的差异也可能导致不同的流场特征。如果我们知道了流场的水头分布和水头变化特征，是否可以反过来推求边界条件、参数的取值和分布等控制因素呢？这就是地下水流的逆问题。

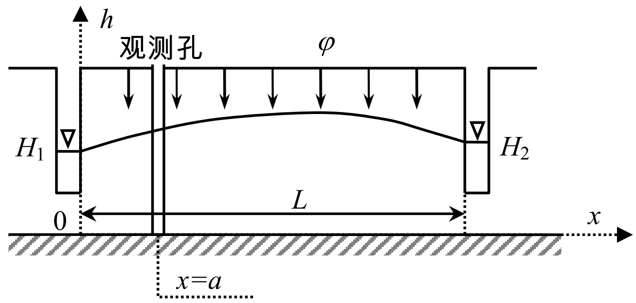


图 4.16　两侧为已知水头边界的河间地块模型

以一个河间地块模型为例（图 4.16），设渗透系数为 K 的潜水含水层被两条无限长的河流切割，河流水位分别为 H_1 和 H_2，含水层顶部有均匀的大于零的入渗补给强度φ，在距离左侧河流 a 处有一个观测孔，其观测地下水位为 h_a。首先考虑稳定流的情况，假设河流为含水层的定水头边界，则描述地下水流的数学模型可表示为

$$K\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\varphi=0 \tag{4.5.1}$$

$$h(x=0)=H_1;\quad h(x=L)=H_2 \tag{4.5.2}$$

模型的正演结果是上述定解问题的解析解

$$h^2=H_1^2+\left(H_2^2-H_1^2+\frac{2\varphi L^2}{K}\right)\frac{x}{L}-\frac{2\varphi L^2}{K}\left(\frac{x}{L}\right)^2 \tag{4.5.3}$$

在已知观测孔水位 h_a 的情况下，可以求出含水层的渗透系数 K，这就是上述定解问题的一个逆问题

$$K=\frac{2\varphi aL(L-a)}{L(h_a^2-H_1^2)-a(H_2^2-H_1^2)} \tag{4.5.4}$$

在已知φ、H_1、H_2、h_a 的情况下，可以求出一个唯一的渗透系数。

然而，地下水流的逆问题往往是非唯一的，不同的含水层参数在某些条件下将形成完全相同的流场。例如，在上述河间地块模型中，如果含水层没有入渗补给，即φ=0，则根据式(4.5.4)得到 K=0。这是错误的，因为模型的正演结果实际上变为

$$h^2=H_1^2+\left(H_2^2-H_1^2\right)\frac{x}{L} \tag{4.5.5}$$

不论含水层的渗透系数有多大，水头的分布都相同。在这种情况下，求含水层参数的逆问题就有无穷个解，无法通过观测孔的水位来识别。当入渗补给强度φ 很小时，逆问题也将接近这种非唯一状态。

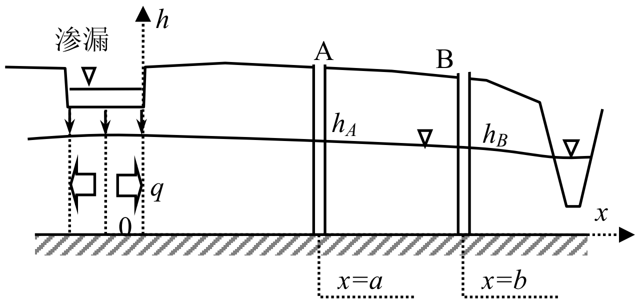


图 4.17　渠道对称渗漏模型

地下水流的逆问题还有可能是不稳定的，即对观测误差具有敏感性。仍然以河间地块模型为例。如图 4.17，有一渠道其水位高于地下水位，向两侧对称渗漏，右侧渗漏水量流向观测孔 A 和 B，单宽流量为 q 属未知。含水层的渗透系数为 K，无入渗补给。该地下水稳定流的正问题可描述为

$$K\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)=0 \tag{4.5.6}$$

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=0}=q\text{；}\ h(x=b)=h_B \tag{4.5.7}$$

上述定解问题的解析解为

$$h^2=h_B^2+\frac{2q}{K}(b-x) \tag{4.5.8}$$

由于单宽流量 q 属于未知变量，其逆问题是已知 h_A 和 h_B 计算单宽流量，根据式(4.5.8)有

$$q=K\frac{h_A^2-h_B^2}{2(b-a)} \tag{4.5.9}$$

如果出于种种原因，观测孔 A 和 B 分别有观测误差ε_A、ε_B，则含有误差ε_q的单宽流量为

$$q+\varepsilon_q=\frac{K}{2(b-a)}\left[(h_A+\varepsilon_A)^2-(h_B+\varepsilon_B)^2\right] \tag{4.5.10}$$

略去误差的二次项，有

$$\varepsilon_q\approx K\frac{h_A\varepsilon_A-h_B\varepsilon_B}{b-a} \tag{4.5.11}$$

则相对误差约为

$$\varepsilon_r=|\varepsilon_q/q|\approx\frac{2(h_A\varepsilon_A-h_B\varepsilon_B)}{h_A^2-h_B^2} \tag{4.5.12}$$

当含水层水力梯度很小，而饱和带厚度又很大时，根据式(4.5.12)可能会产生巨大的相对误差。例如水力梯度为 1 %，A、B 观测孔相距 200 m，h_A=30 m、h_B=28 m，观测孔 A 正好有 0.5%的正误差，而观测孔 B 正好有 0.5%的负误差，则由观测孔反求的单宽流量具有以下的相对误差

$$\varepsilon_r\approx 2\times\frac{30^2+28^2}{30^2-28^2}\times 0.5\%\approx 14.5\% \tag{4.5.13}$$

这意味着观测孔即使是只有 0.5%的相对误差，也可能导致反演模型高达 14.5%的相对误差，误差

被放大了 29 倍。如果用数值模型来求解地下水流问题，则除了观测误差之外，还会引入模型本身的截断误差等计算误差，这种现象将更加严重。

因此，地下水流的逆问题可能是有唯一解的，但可能反演结果对观测误差和模型计算误差特别敏感。在某些情况下逆问题，还可能具有非唯一性。这些因素增加了地下水流逆问题求解的复杂性，几十年来，国内外虽然做了不少研究工作，但在理论和方法上取得的进展并不大。

二、 模型识别的依据和原则

既然地下水流的正演问题是根据含水层的边界条件、初始条件、参数获得地下水的水头分布以及地下水的径流量，则一般来说地下水流的逆问题，是根据已知的水头分布和地下水径流量确定含水层的参数、边界条件或初始条件。而含水层的水头分布和地下水径流量，在绝大多数情况下只能通过调查钻孔、泉等方式观测到。因此，钻孔水位、泉流量等是模型识别的主要依据，其中又以钻孔水位作为最主要的依据。

当以钻孔的观测水位作为地下水流数值模型的反演依据时，人们经常会遇到的问题是：若干个观测孔能反求出多少个参数？或者，需要多少个观测孔来反演若干个参数？这涉及到数值模型反演问题的唯一性。只有当反演问题具有唯一性时，反求参数才是有意义的。为了保证反演模型的唯一性和稳定性，模型识别需要注意以下的原则：

1）不用稳定流模型反演给水度、储水系数等只有非稳定流模型才使用的参数。

2）对于稳定流模型，尽量避免同时反求补给参数和渗透性参数。平面二维稳定流模型的偏微分方程一般可表示为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x m\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y m\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\varphi=0 \tag{4.5.14}$$

式中：m 为含水层的饱和厚度；φ是补给强度。在数值模型中，参数往往分区处理，在一个参数区内含水层假定为均质，因此上述水流方程可在同一参数区内改写为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(m\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{K_y}{K_x}m\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\varphi}{K_x}=0 \tag{4.5.15}$$

可见参数 K_x 总是和补给强度参数联系在一起，难以分开进行模型识别。在上节与图 4.17 对应的稳定流模型中，侧向补给量 q 和渗透系数 K 总是联系在一起的，也不能同时对两者进行识别。在这种情况下，只有渗透系数和补给强度参数的综合参数才能够作为反演的目标。

3）在稳定流模型中，应尽量做到每个参数分区至少有一个作为识别依据的观测孔。不妨再用一维模型说明这个问题，如图 4.18 所示，分区模型中含水层在 $x=L$ 处渗透系数由 K_1 转变为 K_2，观测孔 4 水位已知，则正演模型的解析解可表示为

$$h^2=h_4^2+\frac{2q}{K_2}(x_4-x)\,,\quad L\le x\le x_4 \tag{4.5.16}$$

$$h^2=h_4^2+\frac{2q}{K_2}(x_4-L)+\frac{2q}{K_1}(L-x)\,,\quad 0<x\le L \tag{4.5.17}$$

在已知 q、h_4 的情况下，根据式(4.5.16)和式(4.5.17)可知，必须依靠观测孔 1、3 或 2、3 才能同时

求出 K_1、K_2。如果用观测孔 3，仅能反演 K_2。只用观测孔 1 或 2、或同时用观测孔 1、2 也只能反演 K_1，而无法同时反演两个分区的渗透系数。

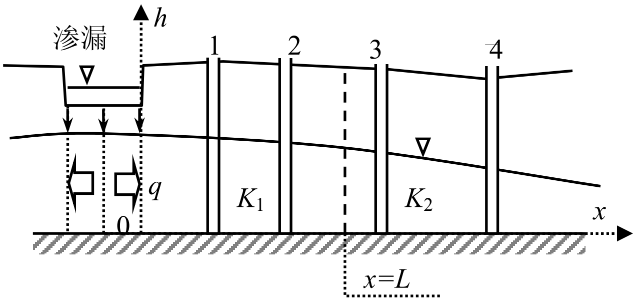


图 4.18　分段潜水含水层模型

4）对于非稳定流模型，补给强度参数、给水度（或储水系数）、渗透系数 3 个参数中，只能同时对其中的 2 个参数进行识别。平面二维非稳定流模型的偏微分方程一般可表示为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x m\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y m\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\varphi=S\frac{\partial H}{\partial t} \tag{4.5.18}$$

在一个均质参数分区中，方程可改写为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(m\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{K_y}{K_x}m\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\varphi}{K_x}=\frac{S}{K_x}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{4.5.19}$$

在上述方程中，只有 2 个独立综合参数，这决定了 3 个参数无法同时反演确定。补给强度参数包括降水和渠系渗漏入渗补给系数、抽水流量有关参数、泉流量有关参数等。

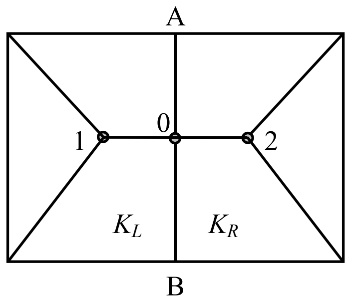


图 4.19 含有 5 个内节点的有限元模型

5）对于非稳定流模型，由于把观测孔地下水位动态的时间序列作为识别依据，模型反演不一定需要观测孔的数目与待求参数的数目相同。以有限元模型反求渗透系数为例，从单元内节点之间关联系数的计算式可以看出，关联系数和渗透系数有成正比的关系，可以表示为

$$G_{pL}^{e}=\phi_{pL}^{e}K_e \tag{4.5.20}$$

式中：K_e 是单元渗透系数（假定为均质）；ϕ_{pL} 是取决于单元几何特征的形状引子。图 4.19 给出了一个三角形四边形混合有限元网格，边界节点均为定水头节点，含有 0、1、2 共 3 个内节点，含

水层在 A-B 线左侧渗透系数为 K_L，右侧渗透系数为 K_R，则有限元模型是由 3 个方程构成的方程组

$$(K_L\phi_L + K_R\phi_R + \phi_{t0})H_0^{k+1} + K_L\phi_{01}H_1^{k+1} + K_R\phi_{02}H_2^{k+1} = F_0^k \tag{4.5.21}$$

$$K_L\phi_{10}H_0^{k+1} + (K_L\phi_{11} + \phi_{t1})H_1^{k+1} = F_1^k \tag{4.5.22}$$

$$K_R\phi_{20}H_0^{k+1} + (K_R\phi_{22} + \phi_{t2})H_2^{k+1} = F_2^k \tag{4.5.23}$$

式中：ϕ_{pL} 表示节点 p 和 L 之间关联系数中的几何因子；ϕ_L 和 ϕ_R 是节点 0 两侧的几何因子；ϕ_{tp} 表示与时间和其他因素有关的系数。其中右端向量 $\{F\}^k$ 可一直追溯到初始条件。在上述方程组中，原待求变量加上需要反演确定的两个渗透系数，则共有 5 个待求变量，而独立方程只有 3 个。从定解条件上来看，待求 2 个参数 K_L、K_R 必须用至少 2 个节点的水头作为已知变量才能反演。这说明从固定时刻的定解条件上讲，待求参数的数目应与观测孔的数目一致。然而。以下情况仍然需要考虑：

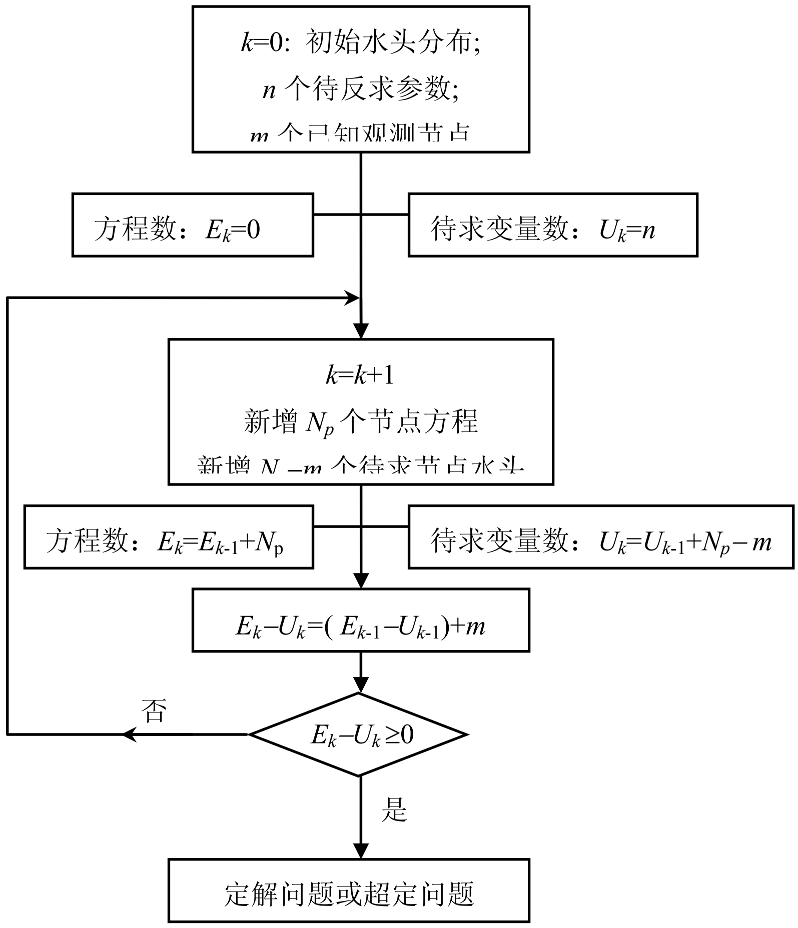


图 4.20　非稳定流数值模型反演的适定性随时间的变化趋势

①已知节点-1 的观测水位动态，能否同时反演 2 个参数 K_L 和 K_R？即在已知 H_1 的情况下，通过上述方程组能否求解出 K_L、K_R、H_0、H_2。显然，由于待求变量有 4 个，而固定时刻的数值模型

方程组中只有 3 个方程，因此通过第一个时步的运算是解决不了这个问题的。但是，在进入下一个时间步长之后，又会产生 3 个方程，2 个待求变量（在第 2 个时刻：节点 1 水头已知，而节点 0 和节点 2 的水头未知）。加上第一个时刻的 3 个方程，现在共有 6 个方程，而待求变量也只有 6 个，因此应有唯一解。对于任何一次时步的推进，都会使方程的增加数大于待求变量的增加数，这种方程数和待求变量数的变化过程可用图 4.20 来表示。对于具有 n 个待求参数和 m 个观测孔的反演问题，由于每增加 1 个时步，方程数与待求变量数之间的差距就缩小 m，因此只要时步数 k 满足 $km\geq n$，模型反演问题就是有唯一解或超定的。这导致一个重要的结论：少量的观测孔也可以反演大量的参数，只要时间剖分的时步数足够大。当时步数大于临界值时，反演问题往往是超定的，可寻求一个使拟合误差最小的最优解。

②用节点 1 的观测水位动态反演渗透系数 K_L 和 K_R 是否可靠？这个问题等价为：渗透系数 K_L 和 K_R 是否在节点 1 的水位动态中有足够的反应？这涉及到反演的稳定性。如果 H_1 对 K_R 的取值很不敏感，则观测误差可能在 K_L 的反演误差中放大。因此，模型反演的合理性需要通过参数敏感性分析进行判断。

6）模型识别需要紧密结合对水文地质条件和地下水流动机理的分析。对于数值模型，其求解的结果并不仅仅由参数决定，还取决于模型对物理现实的刻画程度。模型的简化性质，如用分区参数代替连续分布的参数、用平面二维流模型处理三维流问题等，往往对模型参数识别的可靠性和物理意义有影响。在某些工程领域，由于数值模型识别出来的参数往往和试验取值相差甚远，有人提出“模型参数”的概念。造成这种现象的一个重要原因是有物理意义的参数在简化模型中可能是和一些综合参数混合在一起的，综合参数中包含了不可测的一些简化系数或因子，并没有独立性。当这些系数或因子与物理参数同时被识别时，它们各自都是不准确的，但它们形成的综合参数或无法用参数表示的综合效应可能是唯一的。

三、 反求参数的优化方法

数值模型反演的方法包括直接法和间接法。直接法是把已知的水头分布和水头变化率代入数值模型的方程组，直接计算出其中的参数。这种方法操作复杂而且存在很大的不稳定性，实际应用很少。目前使用的反演方法绝大多数为间接法，即先假定一组参数的取值进行模拟，然后比较计算结果和观测结果，如果误差较大则调整参数值重复计算，直到满足拟合标准。当参数的数目少于 3 个时，可以采用试算法，即目估计算的动态曲线与实测动态曲线的差距，然后根据地下水动力学常识或经验增大或减小参数值，协调不同参数之间的配比关系，反复进行直到满意为止。这种方法需要经验，而且在判断拟合效果上带有主观性，当参数较多很难操作。相对而言，自动优化方法比较合理。

最优化方法存在一个判别函数，用来评价模型拟合的效果，可表示为

$$J(g)=\frac{1}{(\Delta H_s)^2}\sum_{p=1,k=1}^{N_p,N_k}[H_p(t_k)-H_p^*(t_k)]^2+\frac{1}{(\Delta Q_s)^2}\sum_{i=1,k=1}^{N_i,N_k}[Q_i(t_k)-Q_i^*(t_k)]^2 \tag{4.5.24}$$

式中：g 为参数组的一个取值状态；H 和 H^* 分别表示模型计算水头和实测水头；Q 和 Q^* 分别表示模型计算和实测的地下水径流量；ΔH_s 和 ΔQ_s 是两个参考值用于数据的归一化。最优化方法的目标是判别函数达到最小值，并把达到目标的参数取值状态作为模型反演的结果：

$$g_{op} \in \{g_1, g_2, g_3, ..., g_M\} : J(g_{op}) = \min\{J(g_1), J(g_2), ..., J(g_M)\} \quad (4.5.25)$$

式中：g_{op} 是优化得到的参数状态，任何一个的参数状态 g_i 可表示为

$$g_i = \begin{Bmatrix} p_{1i} \in [p_{1-\min}, p_{1-\max}] \\ p_{2i} \in [p_{2-\min}, p_{2-\max}] \\ \cdots\cdots \\ p_{ni} \in [p_{n-\min}, p_{1-\max}] \end{Bmatrix} \quad (4.5.26)$$

式中：p_{ji} 表示第 j 个参数在状态 g_i 中的取值；$p_{j\text{-min}}$ 和 $p_{j\text{-max}}$ 分别为第 j 个参数的最小和最大允许取值；n 为待求参数的数目。

如果只有 2 个待求参数，可以采用穷举法进行优化，即在参数空间中取优选窗口的点阵，每个状态点都运行模型得到一个判别函数的结果。最后，根据判别函数的等值线图确定最优参数状态（图 4.21）。穷举法计算工作量较大，如每个参数取值范围都剖分成 10 个状态点，则需要重复运行模型 100 次，当模型节点数很大时，计算工作量消耗相当巨大。

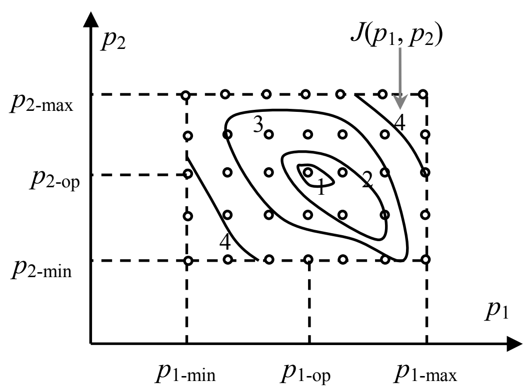


图 4.21 含 2 个待求参数的穷取优化法

为了避免穷举法的缺陷，可以采用其他的优选法，这些优选方法能够从一个参数状态快速的搜寻下一个使判别函数更小的参数状态。常用的优选法有逐个修正法、单纯形法、共轭梯度法等，最近几年发展起来的方法有神经网络算法、遗传算法、蚁群算法等。最优化算法的改进方向一般是提高搜索速度、增强稳健性和复杂条件的适应性。然而，当需要反演确定的参数很多时，采用新的最优化算法并不一定能够减少计算工作量。

第六节 MODFLOW 模型简介

MODFLOW 是一个由美国地质调查局(U.S. Geological Survey)发布的地下水流三维有限差分模拟程序，其全称为 Modular Finite-Difference Ground-Water Flow Model。迄今为止，MODFLOW 共发布了三个重要的版本，分别为 MODFLOW-1988(McDonald et al., 1988)、MODFLOW-1996(Harbaugh et al., 1996)、MODFLOW-2000(Harbaugh et al., 2000)。

由于具有模块化组装设计、源代码（Fortran 语言）共享、运行稳定等优点，加上数据处理软件的不断更新，在 20 多年的推广应用过程中 MODFLOW 逐渐成为国际上最流行的地下水模拟工具，几乎是美国地下水数值模拟应用领域的一种标准。美国地质调查局所发布的 MT3D 和 MT3DMS(Zheng et al., 1999)是用来模拟含水层溶质运移的程序，与 MODFLOW 配套使用，提高了 MODFLOW 处理地下水问题的功能。地下水数值模拟的集成软件 GMS 也嵌入了 MODFLOW 及其配套程序。随着我国与美国在地下水科学工程领域的交流日益密切，MODFLOW 不仅开始在科研院所大量使用，也逐渐扩展到其他企事业单位。

一、 三维有限差分方程的组建

MODFLOW 对模型空间的离散化方法，是使用分层的矩形单元网格（图 4.22），形成由大量方体组成的三维网格系统。在建立差分模型时，与 HST3D 的节点法不同，MODFLOW 采用块中心法(Block-Centered Method)，即离散化的水头、含水层参数都在方体块单元的中心点上定义，而非定义在网格线的交点上。

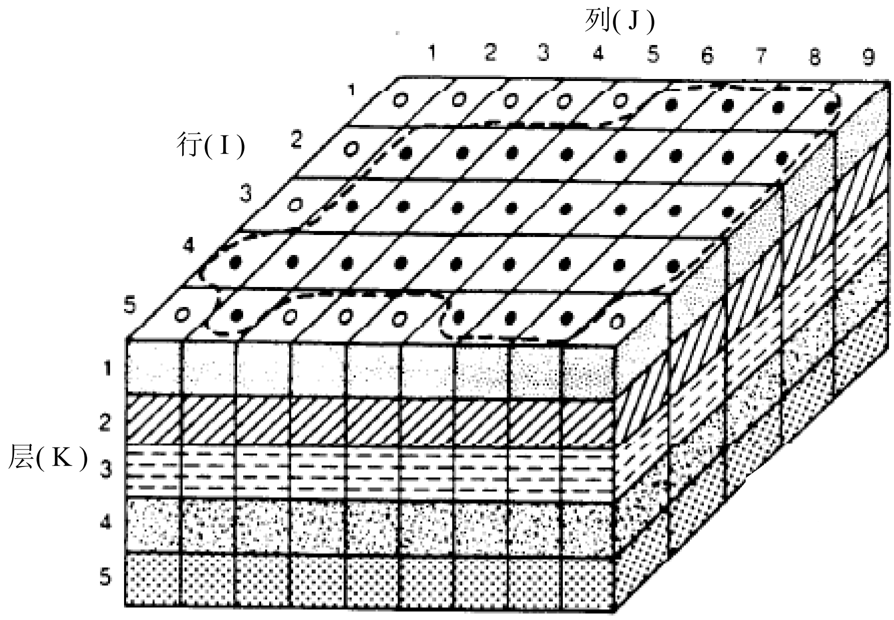


图 4.22 MODFLOW 中的分层网格(据 McDonald et al., 1988)

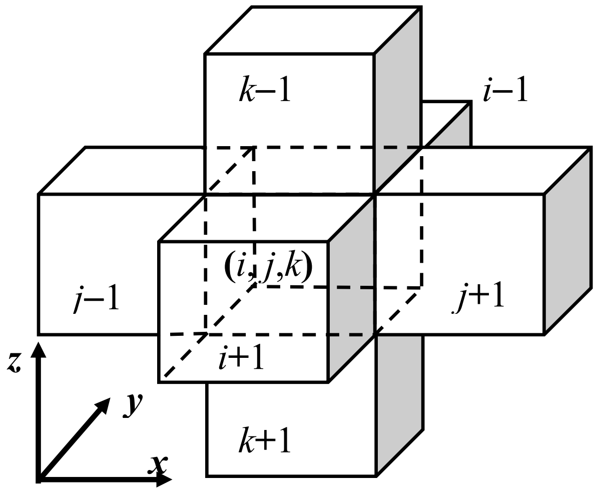


图 4.23 一个块单元周围的 6 个相邻块单元

建立分层网格之后，一个内部块单元一般和 6 个相邻的块单元有直接的水力联系（图 4.23），这种水力联系可用差分方程表示为

$$
\begin{aligned}
& CR_{i,j-1/2,k}(H_{i,j-1,k}-H_{i,j,k})+CR_{i,j+1/2,k}(H_{i,j+1,k}-H_{i,j,k}) \\
& +CC_{i-1/2,j,k}(H_{i-1,j,k}-H_{i,j,k})+CC_{i+1/2,j,k}(H_{i+1,j,k}-H_{i,j,k}) \\
& +CV_{i,j,k-1/2}(H_{i,j,k-1}-H_{i,j,k})+CV_{i,j,k+1/2}(H_{i,j,k+1}-H_{i,j,k}) \\
& \qquad +P_{i,j,k}H_{i,j,k}+Q_{i,j,k}=SS_{i,j,k}(\Delta x_j \Delta y_i \Delta z_k)\Delta H_{i,j,k}/\Delta t
\end{aligned}
\tag{4.6.1}
$$

式中：CR、CC、CV 表示块单元之间的水力关联系数(Hydraulic Conductance)，不妨称为流量系数，它用来计算通过块单元之间界面的流量；$P_{i,j,k}$ 和 $Q_{i,j,k}$ 是用来反映额外补给源的系数；$SS_{i,j,k}$ 为储水系数。块体单元之间的流量可按下式计算

$$
Q_{i,j-1/2,k}=CR_{i,j-1/2,k}(H_{i,j-1,k}-H_{i,j,k})=KR_{i,j-1/2,k}\frac{\Delta y_i \Delta z_k}{\Delta x_{j-1/2}}(H_{i,j-1,k}-H_{i,j,k}) \tag{4.6.2}
$$

其中 $KR_{i,j-1/2,k}$ 表示单元(i, j, k)与$(i, j-1, k)$之间界面上的渗透系数。对水头的时间变化部分采用隐式差分法，于是差分方程(4.6.1)变为

$$
\begin{aligned}
& CR_{i,j-1/2,k}(H^m_{i,j-1,k}-H^m_{i,j,k})+CR_{i,j+1/2,k}(H^m_{i,j+1,k}-H^m_{i,j,k}) \\
& +CC_{i-1/2,j,k}(H^m_{i-1,j,k}-H^m_{i,j,k})+CC_{i+1/2,j,k}(H^m_{i+1,j,k}-H^m_{i,j,k}) \\
& +CV_{i,j,k-1/2}(H^m_{i,j,k-1}-H^m_{i,j,k})+CV_{i,j,k+1/2}(H^m_{i,j,k+1}-H^m_{i,j,k})
\end{aligned}
$$

$$+P_{i,j,k}H^m_{i,j,k}+Q_{i,j,k}=SS_{i,j,k}(\Delta x_j\Delta y_i\Delta z_k)\frac{H^m_{i,j,k}-H^{m-1}_{i,j,k}}{t_m-t_{m-1}} \tag{4.6.3}$$

为了按照线性方程组的形式进行求解，上述方程进一步变形为

$$CV_{i,j,k-1/2}H^m_{i,j,k-1}+CC_{i-1/2,j,k}H^m_{i-1,j,k}+CR_{i,j-1/2,k}H^m_{i,j-1,k}$$

$$-(CV_{i,j,k-1/2}+CC_{i-1/2,j,k}+CR_{i,j-1/2,k}+CV_{i,j,k+1/2}$$

$$+CC_{i+1/2,j,k}+CR_{i,j+1/2,k}-HCOF_{i,j,k})H^m_{i,jk}$$

$$+CV_{i,j,k+1/2}H^m_{i,j,k+1}+CC_{i+1/2,j,k}H^m_{i+1,j,k}+CR_{i,j+1/2,k}H^m_{i,j+1,k}=RHS_{i,j,k} \tag{4.6.4}$$

其中 $HCOF_{i,j,k}$ 是与 $P_{i,j,k}$ 和 $SS_{i,j,k}$ 有关的系数，RHS 为已知项。最终每个有效单元可以写出如式(4.6.4)所示的方程，形成整体方程组进行求解。

MODFLOW 在时间剖分上的一个显著特点，是把较长的模拟期划分若干个短的时期(Stress Period)，然后每个时期又被剖分为一系列的时步。许多变量，如井孔开采量、河流水位在一个时期内被处理为常量，但是在不同的时期可具有不同的数值。

二、 MODFLOW 的模块化设计

成功的模块化设计是 MODFLOW 能够被顺利传阅和不断改进扩充的重要原因。这些模块把对各种特殊问题的处理分散在不同的子程序中，便于阅读、修改和组装。MODFLOW-1988 和 MODFLOW-1996 都包含了以下 10 个模块：

1) Basic 模块，用于管理模型网格信息、时间剖分信息、块单元属性、初始条件、数组内存调用、整体水均衡计算、输出控制等。块单元的属性分为变水头单元(variable-head cell)、定水头单元(constant-head cell)和无效单元(inactive cell)。

2) Block-Centered Flow 模块，用于计算单元之间的水力关联系数和控制贮水量变化的系数。这是整个 MODFLOW 程序体系中最重要的部分。单元之间水力关联系数的计算采用串联法处理非均质性，需要考虑承压、非承压、越流等各种条件。对越流的处理允许进行准三维而不是纯三维的水流模拟，不生成弱透水层的模拟层，而是把越流系数直接计入垂向水力关联系数。在考虑承压和无压条件方面，模拟层的属性被确定为以下 4 种中的任何一种：

Layer-type=0，类承压含水层的模拟层，导水系数和储水系数（给水度）恒定不变；

Layer-type=1，具有潜水面的模拟层，导水系数根据饱和带厚度不断更新，只有顶层才能处理为这种类型；

Layer-type=2，导水系数不变的可承压模拟层，当发生承压-无压转换时，储水系数(给水度)发生变化，而导水系数处理为不变；

Layer-type=3，导水系数可变的可承压模拟层，当发生承压-无压转换时，储水系数(给水度)和导水系数同时发生变化。

3) River 模块，用来处理河流与地下水的相互作用。河流的长度被剖分为若干段(reach)，每段

刚好位于一个网格单元内，设在单元内河流段的总长度为 L，河流的平均宽度为 W，河床底部沉积物的渗透系数为 K，厚度为 m，则有一个综合描述参数来代替河流

$$CRiv = \frac{KLW}{m} \tag{4.6.5}$$

式中：$CRiv$ 为地下水-河流的水力关联系数。河流对地下水的补给流量按照以下公式计算：

$$QRiv = CRiv(HRiv - H_{i,j,k})\text{，}\quad H_{i,j,k} > RBot \tag{4.6.6}$$

$$QRiv = CRiv(HRiv - RBot)\text{，}\quad H_{i,j,k} \le RBot \tag{4.6.7}$$

式中：$HRiv$ 为河流段的水位；$H_{i,j,k}$ 是河流段所在单元的水头；$RBot$ 为河床的高程。MODFLOW 的开发者注意到如果地下水位在河床以下，将形成水力梯度近似于 1 的渗漏带，因此建议在这种情况下用户输入的地下水-河流的水力关联系数用下述公式计算

$$CRiv = \frac{KLW}{HRiv - RBot} \tag{4.6.8}$$

这样做的目的是让程序仍然调用式(4.6.7)进行流量计算。

4) Recharge 模块，用于处理地下水的面源补给。面源补给在概念上比较简单，就是输入一个补给强度，而一个网格单元接受的补给流量按下式计算

$$QR_{i,j} = I_{i,j}\Delta x_j \Delta y_i \tag{4.6.9}$$

式中：i, j 表示受补给单元的平面离散坐标；QR 为补给流量；I 是补给强度。然而，在同一个离散坐标(i, j)处，哪个模拟层的单元接受补给流量是个问题。MODFLOW 有一些可选处理方法，比如允许补给流量穿越位于非饱和带的单元等量传递到饱和带最顶部的单元。

5) Well 模块，用于处理抽水井。用户在给定井孔的模拟层位置（一个“井孔”只能位于一个模拟层）和平面位置之后，只要再输入抽水流量（负值）或注水流量（正值）即可。对于同时穿越多个模拟层的抽水井（混合井），需要设置多个“井孔”，每个井孔分配一定的流量输入程序。MODFLOW 的开发者建议用导水系数进行分配

$$\frac{Q_i}{Q_w} = \frac{T_i}{\sum T_i} \tag{4.6.10}$$

式中：Q_w 是抽水井的总流量；Q_i 是井孔 i 的分配流量；$\sum T_i$ 表示有关模拟层导水系数的总和；T_i 为井孔 i 所在模拟层的导水系数。

6) Drain 模块，用于处理地下水和排水沟（排水洞）的相互作用。地下水的排泄量计算公式为

$$QD_{i,j,k} = CD_{i,j,k}(H_{i,j,k} - d_{i,j,k})\text{，}\quad H_{i,j,k} > d_{i,j,k} \tag{4.6.11}$$

$$QD_{i,j,k} = 0\text{，}\quad H_{i,j,k} \le d_{i,j,k} \tag{4.6.12}$$

式中：i, j, k 为排水体所在单元的离散坐标；QD 为地下水排泄量；CD 为排水系数；H 是排水体所在单元的水头；d 是排水体的控制高程。

7) Evaportranspiration 模块，用于处理植被蒸腾和表土蒸发引起的潜水蒸发排泄。这一模块采

用含有极限蒸发深度的线性蒸发公式

$$RET_{i,j} = RETM_{i,j}, \qquad H_{i,j,k} > hs_{i,j} \tag{4.6.13}$$

$$RET_{i,j} = RETM_{i,j}\frac{H_{i,j,k} - (hs_{i,j} - d_{i,j})}{d_{i,j}}, \qquad H_{i,j,k} > hs_{i,j} \tag{4.6.14}$$

$$RET_{i,j} = 0, \qquad H_{i,j,k} < hs_{i,j} - d_{i,j} \tag{4.6.15}$$

式中：i, j 为网格平面坐标；RET 为潜水蒸发强度；$RETM$ 为潜水最大可能蒸发强度；hs 为潜水蒸发达到最大值的临界水位高度；d 为潜水蒸发的极限深度。地下水蒸发排泄量也涉及到赋予哪个模拟层的问题，因为有些位置较高的单元可能处于疏干状态。

8) General-Head Boundary 模块，处理一般性的已知水头边界。边界与模拟区地下水的交换直接采用以下公式

$$QB_{i,j,k} = CB_{i,j,k}(HB_{i,j,k} - H_{i,j,k}) \tag{4.6.16}$$

式中：QB 为边界对地下水的补给流量；CB 为流量系数；HB 为边界处的已知水头。

9) Strongly Implicit Procedure 模块，用于实现求解线性方程组的强隐式(SIP)法，实际上是一种能够保持矩阵在 LU 分解后仍有稀疏性的技术。

10) Slice-Successive Overrelaxation 模块，用于实现求解差分方程组的分片超松弛迭代法。这种方法是在剖面网格上交替采用直接法进行求解，迭代多次，直到两次迭代结果的差距足够小。

除了这 10 个模块之外，其他研究人员还根据各自的需要编写了一些特定的模块，这些模块有的已经发布在基于 MODFLOW 的专业软件中，有的散见于有关文献。MODFLOW-2000 在程序的整体结构上做了一些修改，包含更多配套的模块。

三、 MODFLOW 模型的前后处理

建立一个复杂的地下水流三维有限差分模型需要处理大量的数据。MODFLOW 提供了一系列文件用来输入不同的数据，并规定了一些格式。数据文件基本上采用明码格式，因此能够方便的用文本软件进行编辑修改。然而，除了一些简单的参数之外，关键数据的不恰当修改可能会导致模型运行出错。模型输出的各类数据往往也很多，分别存放于各自的文件中。基本上每个模块都有自己的输入输出文件。这些数据可以由用户转换为特定的格式，以绘制不同的图件。

大数据量和数据关系的复杂性催生了地下水有限差分模拟专业软件的诞生。基于 MODFLOW 最早的前后处理软件是 1991 年由 Chiang 和 Kinzelbach 在德国发布的 Processing Modflow，它兼容 MODFLOW-1988 和 MODPATH(一个数值模型中跟踪质点对流的程序)并能够可视化处理网格数据、绘制等值线图，这一专业软件在 DOS 系统上运行。1995 年，Chiang 和 Kinzelbach 又发布了在 WINDOWS 系统上运行的 Processing Modflow for Windows，连接了溶质运移程序 MT3D。2003 年，Chiang 和 Kinzelbach 发布了兼容 MODFLOW-1996 和 NODFLOW-2000 的 Processing Modflow Pro，内容更加丰富，连接了大量与 MODFLOW 有关的计算程序，包括 MT3D 和 MT3DMS 等。20 世纪 90 年代末，加拿大的 Waterloo 水文地质公司(Waterloo Hydrogeologic Inc.)开始推出新的基

于 MODFLOW 的地下水模拟软件，发布了 Visual Modflow，具有三维可视化界面，2007 年形成了 Visual Modflow 4.1 的中文版。目前，Processing Modflow Pro 和 Visual Modflow 在国内都有大量应用。与此同时，美国 Brigham Young 大学的环境模拟研究实验室开发了 GMS，一个不仅兼容 MODFLOW，而且兼容其他类型的地下水和溶质运移数值模拟程序，包括有限元程序 FemWater。

四、 MODFLOW 的应用与改进

尽管 MODFLOW 提供了进行地下水流数值模拟的良好平台，但是任何具体模型的建立和运行结果，主要都取决于模拟者对实际条件和地下水流动机理的认识。MODFLOW 的核心程序以及各种模块的编制总是隐含了若干假定，这些假定简化了含水层的描述和地下水流动过程的描述，同时还提供了各种不同复杂程度的特殊问题处理方法。当模拟者在使用这些模块和处理选项时，应仔细考虑其中可能存在的问题，尽量避免对模拟结果不加分析的全盘接受。

MODFLOW 不能代替人们对含水层结构的调查分析。含水层的空间形态、强弱透水介质的分布特征等信息，是建立 MODFLOW 模型的基础，划分多少层、如何划分完全取决于模拟者的判断力和精度要求。陡峭的含水层在模拟时需要注意：含水层的形状对 MODFLOW 的承压层没有直接意义，因为起作用的实际是可以预先给定的导水系数，当含水层十分倾斜时，MODFLOW 不会自动对水力梯度进行修正。

MODFLOW 对多含水层系统提供了准三维的处理办法，即不在模型中显式的处理弱透水层，而是用越流概念参数隐式的包含在强透水层的相互作用之中。这种准三维模型忽略了弱透水层中的水平流以及弱透水层的贮存量释放，当弱透水层厚度很薄时，不会带来明显误差。然而，如果弱透水层很厚，且与地面沉降关系密切时，不宜选择准三维方法，因为水平流以及弱透水层贮存量变化将有显著的影响。为了避免准三维模型的较大误差，可以将弱透水层划分为若干个模拟层在模型中显式处理，放弃越流概念参数。

处理包气带是 MODFLOW 的弱点之一。当地下水位低于模型单元体的底部时，单元往往被处理为无效单元，在 Wetting and Drying 模块的作用下，MODFLOW 允许无效单元重新被激活。这种反复过程可能是难以收敛的。另外，当承压-无压转换发生时，有一套复杂的处理手续来改变导水系数和给水度（储水系数）。目前，有研究者试图开发专门处理包气带问题的模块，把土壤非饱和渗流的理论引入 MODFLOW。

在美国地质调查局公开发布的 MODFLOW 中，处理井孔的部分仅有 Well 模块。这个模块实际是不完善的，因为它把抽水流量仅仅作为普通的源汇项加入到有限差分方程中，并没有刻画井周附近的地下水流动。在运用这个模块得到结果之后，需要进行校正，可参考本书在有限差分模型中介绍的井孔校正公式。另外，Well 模块难以处理穿越多个模拟层的混合井，用导水系数分配流量的式(4.6.10)实质是错误的。在 MODFLOW 中专门处理混合井以及考虑井管内水流运动的模块已经有研究者开发，但没有集成在 MODFLOW 的共享版本中。

第五章　非饱和渗流模型

一般来说，将储存和运移在地表以下的土壤孔隙、岩石孔隙、裂隙和溶洞中的水称为地下水。当地下含水介质完全被水饱和时，其中的水称为饱和地下水，一般也称为地下水。当介质孔隙没有被水充满时，该介质处于非饱和状态，称这种区域为非饱和带（或包气带），其中的水分称为非饱和地下水，如果这种非饱和介质是土壤，其中的非饱和水也称为非饱和土壤水，即一般所指的土壤水。土壤水是陆地植物赖以生存的水分，也是联系地表水与地下水的纽带。在进行地面水、土壤水、地下水和大气水相互转化关系研究中，非饱和渗流理论和模型是重要的基础和工具，在水资源数量和质量的正确评价中起着关键作用。

第一节　非饱和土壤水的基本性质

一、 土壤水数量的表示

土壤是一种由固、液、气三相物质体组成的疏松多孔介质系统，其中所含液体（即水或水溶液）数量的多少，由三相体中液体水分所占整个土壤的相对比例来表示，称之为土壤含水率（或土壤含水量），常有以下几种表示方法。

（1） 重量含水率（θ_g）

土壤重量含水率（θ_g）以土壤中所含的水分重量占相应固相物质重量（烘干土重）的比值表示。对于土壤中任一点 P（物理点）处体积元ΔV_0，其中水分的重量ΔG_w，固相物质重量ΔG_g，则

$$\theta_g = \frac{\Delta G_w}{\Delta G_g} \tag{5.1.1}$$

（2）体积含水率（θ_v）

土壤中水分占有的体积与土壤总体积（包括土壤颗粒体积和土壤孔隙体积）的比值称为土壤体积含水率，用θ_v表示。以ΔV_w表示体积元ΔV_0内水分占有的体积，则

$$\theta_v = \frac{\Delta V_w}{\Delta V_0} \tag{5.1.2}$$

（3）饱和度（ω）

饱和度是体积元ΔV_0内水的体积ΔV_w与孔隙体积ΔV_v的比值，表示孔隙被水充满的程度，即

$$\omega = \frac{\Delta V_w}{\Delta V_v} \tag{5.1.3}$$

体积含水率、重量含水率和饱和度按定义可用比值也可用百分数表示，三者间可以换算。

二、 土壤水势

和自然界中所有物体一样，土壤水所具有的能量也由动能和势能组成。由于水分在土壤孔隙中运动很慢，其动能一般可忽略不计。因此，一般情况下，土壤水能量的变化主要是考虑土壤水势能的变化。土壤水分所具有的势能称为土壤水势，简称土水势。任两点之间土壤水势能之差，即土水势差，是水分在此两点间运动的驱动力。

土壤中任一点水势的大小，可由该点的土壤水分状态与标准参照状态的势能差来定义。标准参照状态，即在标准大气压（或当地大气压）下，与土壤水具有相同温度的情况下（或某一特定温度下），以及在某一高度处的假想的纯自由水体（不含有溶质，不受固相介质作用）。土水势的单位取决于对土壤水分单位数量的规定方式：单位容积土壤水的土水势单位是压强单位 Pa 及 atm、bar；单位重量土壤水的土水势的单位是长度单位 cm 或 m，也是通常所称的水头，数值上与水柱高度表示的压强值相等。

土水势由以下各分势组成，即

$$\varphi_w = \varphi_g + \varphi_p + \varphi_m + \varphi_s + \varphi_T \tag{5.1.4}$$

式中：φ_w 表示土水势，即土壤水的总势能；φ_g 表示重力势；φ_p 表示压力势（或称气压势φ_a）；φ_m 表示基质势（或称基膜势）；φ_s 表示溶质势（渗透压势）；φ_T 表示温度势。

标准参照状态下的土水势为零。将单位数量的土壤水分从标准参考状态移至某一（点）土壤水状态时，如果环境对土壤水做了功，则该状态下土水势为正；若土壤水对环境做了功，则该状态下的土水势为负。在数值上，土水势的值与所做功的值相等。以下讨论各分势。

（1） 重力势（φ_g）

由于重力场的存在，将单位数量的土壤水分从标准参考状态平面移至某一（点）土壤水状态时，而其他状态都不变，需要克服重力作用而做功，这种功以重力势能的形式储存于土壤水中，称为该点土壤水的重力势。

标准参考状态平面（基准面）可任意选定，研究田间土壤水分运动问题时一般选在地表或地下水水面处。垂直坐标 z 的原点设在参考平面上，其方向根据需要或取向上为正、或取向下为正。垂直坐标选定后，可得单位质量土壤水分的重力势为

$$\varphi_g = \pm gz \tag{5.1.5}$$

单位容积土壤水分的重力势为

$$\varphi_g = \pm \rho_w gz \tag{5.1.6}$$

单位重量土壤水分的重力势为

$$\varphi_g = \pm z \tag{5.1.7}$$

式中：g 为重力加速度；ρ_w 为土壤水的密度。当 z 坐标向上为正时，等号右边取“＋”号，z 坐标向上为正时取“－”号。z 值本身的正负，取决于研究点相对于基准面的位置，基准面之上，$z > 0$；基准面之下，$z < 0$。

单位重量土壤水的土水势具有长度单位，一般称为水头。重力水头又称位置水头，它仅与计算点和参照基准面的相对位置有关，与土质条件无关。

（2） 压力势（φ_p）

压力势是由于压力场中压力差的存在而引起的。多孔介质中任一点处的水分所受到的压力，与标准大气压力之间有一压力差，即称该点存在一个附加压强Δp。由于附加压强（或压力差）的存在，使单位数量的土壤水分由该点转化为标准参考状态，而其他状态保持不变，仅由附加压强所做的功，称为该点的压力势。

地下水面处的土壤水压力势为零。地下水面以下的饱和土壤水的静水压力为正值，则其压力势$\varphi_p \geq 0$。若所研究点位于地下水面以下深度 h 处，该点的附加压强为$\rho_w gh$，则单位质量土壤水的压力势为

$$\varphi_p = gh \tag{5.1.8}$$

单位容积土壤水分的压力势为

$$\varphi_p = \rho_w gh \tag{5.1.9}$$

单位重量土壤水分的压力势为

$$\varphi_p = h \tag{5.1.10}$$

地下水面以上的非饱和土壤水，由于与大气连通，各点所承受的压力均为大气压，附加压强Δp＝0，因而，非饱和土壤水的压力势φ_p＝0。

（3） 基质势（φ_m）

土壤水的基质势是由于土壤基质对水分的吸持作用引起的，这种吸持作用可概括为吸附作用和毛管作用。单位数量的土壤水分由非饱和土壤中的一点转化为标准参考状态，除土壤基质对土壤水分的吸持作用外其他状态保持不变，土壤水为了反抗土壤基质的吸持作用而对环境做的功，即为该点土壤水的基质势。由于土壤基质对水分的吸持作用，使土壤水的势能低于参照状态，因此，非饱和土壤水的基质势永远为负值，即$\varphi_m \leq 0$。饱和土壤水的基质势$\varphi_m = 0$。

土壤基质对水分吸持作用的大小与土壤中所含水量的多少有关，因此，非饱和土壤水的基质势φ_m是土壤含水率θ 的函数。

（4） 溶质势（φ_s）

溶质势的产生是由于可溶性物质（例如盐类）溶解于土壤溶液中，溶质对水分子的吸引力降低了土壤水的势能所致。单位数量的土壤水分从土壤中一点转化为标准参考状态时，仅由于溶液中溶质的吸引作用使土壤水对环境做的功，即为该点土壤水的溶质势。溶质势可通过渗透实验来证明。当土—水系统中存在半透膜（只允许水流通过而不允许盐类等溶质通过的材料）时，水将通过半透膜扩散到溶液中去，由于溶质分子对水的吸持作用，导致溶液比纯水具有较低的势能，这种势能差就是溶质势，也称为渗透压势。溶液的渗透压 P_s 可表示为

$$P_s = \frac{c}{m} RT \tag{5.1.11}$$

式中：c 为单位体积溶液中含有的溶质质量（g/cm^3），也称为溶液的浓度；m 为溶质的摩尔质量（g/mol），数值上等于溶质的分子量；因此，c/m 为以摩尔表示的溶液浓度（mol/cm^3）； R 为摩

尔气体常数，或称通用气体常数，当渗透压以 Pa 为单位时，R=8.31×10^6Pa·cm^3/(mol·K)；T 为热力学温度（K）。

由此可得，含有一定溶质的单位体积土壤水的溶质势φ_s为

$$\varphi_s = -\frac{c}{m}RT \tag{5.1.12}$$

土壤中并不存在半透膜，土壤水中溶质的存在并不显著地影响土壤中水分的流动，因此一般可不考虑溶质势。但在植物根系吸水时，水分被吸入根内须通过半透性的根膜，土壤溶液的势能必须高于根内势能，否则植物根系将不能吸水，甚至根茎内水分还可能被土壤吸取。为此，溶质势在研究植物根系和土壤水的相互作用中具有重要作用。

（5） 温度势（φ_T）

温度势是由于温度场的温差所引起的。土壤中任一点土壤水分的温度势由该点的温度与标准参考状态的温度之差所决定。通常认为，由于温差存在对土壤水分运动通量的影响相对较小，因此，目前在分析土壤水分运动时，温度势的作用常被忽略。

土壤中温度的分布和变化对土壤水分运动的影响可能会大大超过温度势本身的作用。如温度对水的物理化学性质的影响，会进一步影响到基质势、溶质势及土壤水分参数的变化；温度对土壤水相变的影响，在土壤中水、气、热转化迁移研究中十分重要。

上述 5 种土壤水的分势能中，针对液态水在土壤中运动时，溶质势和温度势一般可不考虑。那么，在饱和土壤中，其总水势由压力势和重力势组成，一般以总水头 H 表示，可写为（四）

$$H = h + z \tag{5.1.13}$$

式中：h 为静水压力水头，为地下水面以下深度；z 为相对于基准面的位置水头。

在非饱和土壤中，当不考虑气压势的情况下，总水势由基质势和重力势组成，即

$$\varphi = \varphi_m + z \tag{5.1.14}$$

式中：φ_m 为基质势，若以压力水头 h 表示，则式(5.1.14)可写成与式(5.1.13)相同的形式。

三、 土壤水分特征曲线

如上所述，土壤水的基质势和溶质势均为负值，使用时多有不便。因此，将基质势和溶质势的负数定义为吸力，分别称为基质吸力和溶质吸力。在研究田间土壤水分运动时，溶质势一般不考虑。故一般所说的吸力即指土壤水的基质吸力，用 s 表示，$s = -\varphi_m$。

非饱和土壤水的基质势（或土壤水吸力）是土壤含水率的函数，二者之间的关系曲线称为土壤水分特征曲线。该曲线反映了土壤水的能量与数量关系，是反映土壤水分运动基本特征的曲线。

当土壤中水分处于饱和状态时，含水率为饱和含水率 θ_s，吸力 s 或基质势 φ_m 为零。若对土壤施加微小的吸力，土壤中尚无水排出，土壤含水率仍维持饱和值；当吸力增加至某一临界值 s_a 后，土壤最大孔隙中的水分开始排出，含水率开始减小。该临界值称为进气吸力或进气值，即土壤水由饱和转为非饱和时的负压值。不同质地的土壤，其进气值不同，一般轻质土或结构良好的土壤进气值较小，重质黏性土壤的进气值较大。

土壤基质势常以负压 h 表示，土壤负压与含水率有关，两者间的数量关系称为土壤水分特征曲线。目前尚不能根据土壤的基本性质从理论上得出土壤负压与含水率的定量关系，因此，土壤

水分特征曲线只能用试验的方法测定。为了方便计算和分析，常用实测得到的结果拟合为经验公式。目前采用较多的是 W. R. Gardner 等（1970）和 van Genuchten M. Th. 提出的以下经验关系式。

Gardner 提出的经验公式

$$h = a\theta^{-b} \tag{5.1.15}$$

式中：h 为负压水头（cm）；θ 为土壤含水率，常以体积百分数表示（cm^3/cm^3）；a，b 均为经验常数，由试验测定。

van Genuchten M. Th.提出的经验公式

$$\frac{\theta-\theta_r}{\theta_s-\theta_r}=\left(\frac{1}{1+(\alpha h)^n}\right)^m \tag{5.1.16}$$

式中：θ_s 为饱和土壤含水率（cm^3/cm^3）；θ_r 为最大分子持水率（cm^3/cm^3）；m，n，α 均为经验系数（或指数），由试验测定，其中，$m=1-\dfrac{1}{n}$，$0<m<1$。

土壤水分特征曲线对不同质地的土壤是不同的。图 5.1 是低吸力下实测几种土壤的水分特征曲线（只取脱湿过程结果）。一般情况下，土壤的黏粒含量越高，同一负压条件下土壤含水率就越大，或同一含水率下其负压值越高。这是由于黏质土壤孔径分布较为均匀，随着负压的增大，含水率缓慢减小。砂性土壤中孔隙一般较大，达到一定负压时，大孔隙中的水分首先迅速排空，土壤中仅留存少量水分，当负压再增加时，含水率的变化就很小了。

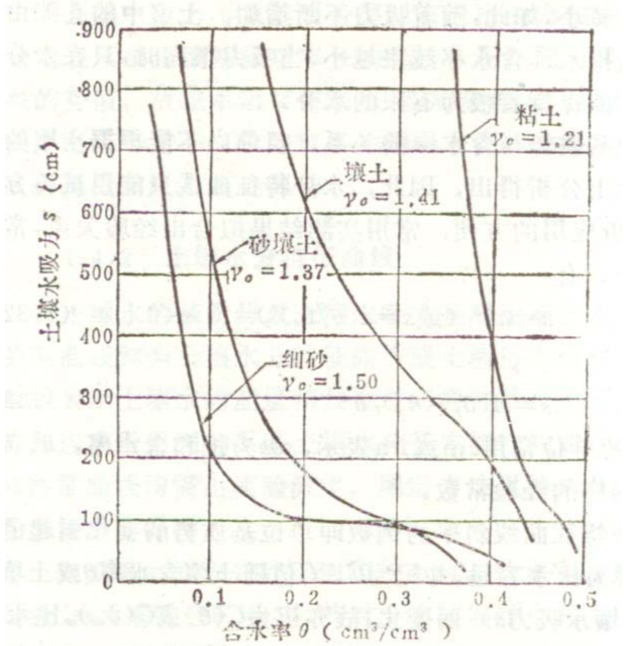


图 5.1　不同土壤的水分特征曲线（低吸力脱湿过程，γ_c 为土壤容重）

水分特征曲线还受土壤结构的影响。同一质地的土壤，当土壤结构不同时（或土壤容重不同时），水分特征曲线也不同，这在低负压范围内尤为明显。与疏松的土壤相比，压实的土壤降低了土壤孔隙度，压缩了其中的大孔隙，使土壤开始释水所需的吸力加大，尤在低负压范围内，含水率变化较缓慢。但对于小孔隙，在压实和未压实情况下并没有显著变化，所以在高负压时，两者的土壤水分特征曲线是一致的。图 5.2 表示同一种土壤在不同干容重条件下的水分特征曲线。

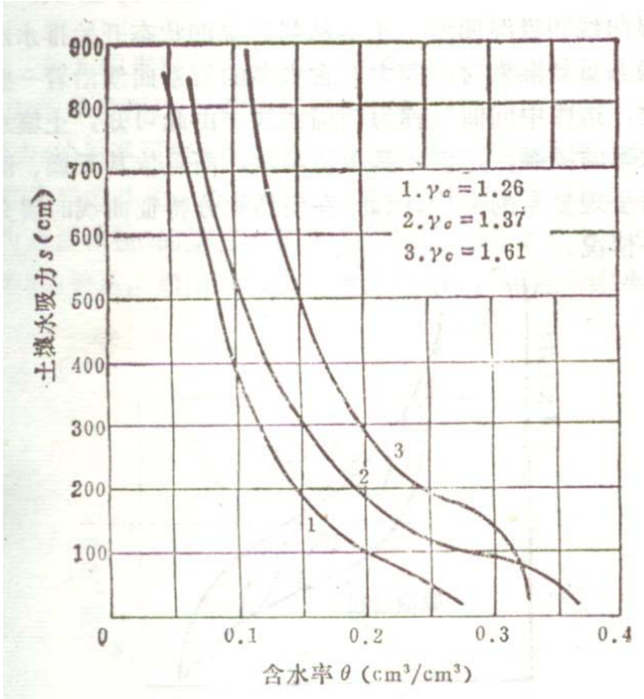


图 5.2　同一砂壤土不同干容重下的水分特征曲线（低吸力脱湿过程，γ_c 为土壤容重）

温度对土壤水分特征曲线也有影响，温度升高时，水的黏滞性和表面张力下降，基质势相应增大。在低含水率时，这种影响表现得更加明显。

土壤水分特征曲线对于同样质地和结构的土壤也非单值曲线，即使在恒温条件下，对于吸水和脱水过程，负压与含水率的关系曲线是不同的。这种现象称为滞后现象，如图 5.3 所示。

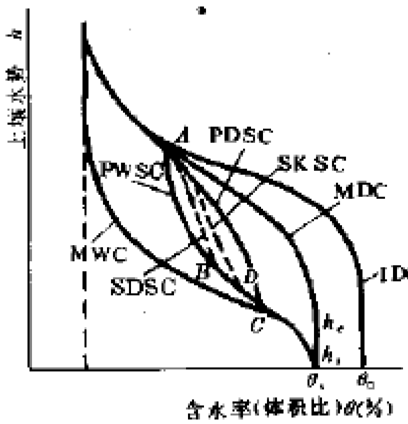


图 5.3　土壤水分特征曲线的滞后现象

土壤从原始充分饱和状态（含水率为 θ_0）开始脱水（或脱湿），直到土壤含水率不随吸力的增加而产生明显变化为止，此时的土壤含水率称为残留含水率 θ_r，在这一过程测得的土壤水分特征曲线（如图 5.3 中 IDC 线）称为初始脱湿曲线。土壤从 θ_r 开始重新吸水（吸或湿），直到吸力降为零，此时含水率为 θ_s，在这一过程测得的土壤水分特征曲线（如图 5.3 中 MWC 线）称为主吸湿曲线。需要注意的是，同样吸力为零，但此时的土壤含水率 θ_s 却小于原始饱和含水率 θ_0。这是由于在土壤重新充水过程中，部分土壤孔隙中的空气未能及时排出即被水膜所隔绝，阻断了空

气排除通道，这就使土壤充水容积小于土壤实际孔隙，从而使饱和含水率变小。从饱和含水率 θ_s 状态再次脱湿，可测得主脱湿曲线 MDC，曲线 MDC 及 MWC 以 θ_s 和 θ_r 为起点和终点组成闭合环路。土壤在主脱（或吸）湿过程中某一时刻（如图 5.3 中点 A 或点 C）改变运动状态，所得到新的特征曲线称初始吸湿（或脱湿）扫描线（图 5.3 中 PWSC 线和 PDSC 线）；在初始扫描过程中再改变运动状态（点 B 或点 D），所得的特征曲线称为第二次脱湿（或吸湿）扫描线（SDSC 线及 SWSC 线），继续转变时称高次扫描线。在实际应用中，需判断土壤水分运动是属于脱湿还是吸湿，从而选择正确的曲线。

土壤水分特征曲线的斜率是每单位基膜势（负压值）变化所引起土壤含水率的变化，一般称为容水度（或比水容量），用下式表示：

$$C=-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\varphi_m}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}h} \tag{5.1.17}$$

式中：C 为容水度；其余符号同前。

第二节　非饱和水分运动基本方程

一、 非饱和土壤水的达西定律

由饱和砂柱渗透试验得出的达西定律也可引伸到非饱和土壤水分运动中，最早将达西定律延伸至非饱和水流的是 L. A. Richards（1931），并规定导水率 K 不再是常数，是随土壤含水率（或土壤基质势）变化的函数，即非饱和土壤水的达西定律为

$$q=-K(\theta)\cdot\nabla H \tag{5.2.1}$$

或

$$q=-K(h)\cdot\nabla H \tag{5.2.2}$$

式中：∇H 为水势梯度；$K(\theta)$和 $K(h)$为导水率，分别是土壤含水率 θ 和土壤基质势 h 的函数。

由于 $K(h)$受滞后影响较大，式（5.2.2）仅适用于单纯的吸湿或脱湿过程，但式（5.2.1）可避免滞后作用的影响。

与饱和水流不同，非饱和土壤水的基质势为负值，土水势在不考虑溶质势、温度势及气压势时，只包括重力势和基质势。因此，总水头常以压力水头和位置水头之和来表示。

二、 非饱和土壤的水力传导度

非饱和土壤水力传导度 K（又称导水率）是反映土壤水分在压力水头差作用下流动的性能，可定义为在单位水头差作用下，单位断面面积上通过的流量，量纲为[LT^{-1}]。它是土壤含水率或土壤负压的函数。

饱和土壤的孔隙都被水充满，导水率达到最大值，且为常数。而非饱和土壤中，因土壤孔隙中部分充气，导水的孔隙相应减少，水力传导度低于饱和土壤水情况，且为负压或含水率的函数，记为 $K(\theta)$或 $K(h)$，并随含水率的降低而减小。土壤水的排水首先从大孔隙中开始，随着吸力的增

加，大孔隙中的水被逐渐排出，水流仅能在小孔隙中流动。因此，土壤从饱和过渡到非饱和将引起导水率的急剧降低。当吸力由零增至 1×10^5 Pa 时，导水率可能降低几个数量级，有时会降低至饱和导水率的 1/100000。

水力传导度 K 值的大小与土壤质地有关。当负压较低或土壤含水率较高时，砂性土壤的水力传导度比黏性土壤的要大，但是当吸力很高时，由于砂性土壤大部分孔隙中的水被排空，成为不导水的孔隙，此时砂性土壤的水力传导度反而会比黏性土壤的要低。非饱和土壤的导水率还与土壤结构有关。当土壤压密后，大孔隙减少而小孔隙增加，此时对同样的含水率，导水率将随土壤干容重的增大而减小。

非饱和土壤的水力传导度与土壤负压 h 或含水率 θ 的关系通常由试验资料拟合成经验公式，一般有以下几种形式：

1）土壤水力传导度与负压 h 的关系式：

$$K(h)=K_s\,\mathrm{e}^{-c|h|} \tag{5.2.3}$$

$$K(h)=a|h|^{-n} \tag{5.2.4}$$

$$K(h)=\frac{a}{|h|^n+b} \tag{5.2.5}$$

式中： K_s 为饱和土壤水导水率，或称渗透系数；a，b 为经验常数；c，n 为经验指数。

2）土壤水力传导度与含水率 θ 的关系式：

$$K(\theta)=K_s\,\mathrm{e}^{-c(\theta_s-\theta)} \tag{5.2.6}$$

$$K(\theta)=K_s\left(\frac{\theta-\theta_r}{\theta_s-\theta_r}\right)^n \tag{5.2.7}$$

$$K(\theta)=K_s\left(\frac{\theta-\theta_r}{\theta_s-\theta_r}\right)^{0.5}\left\{1-\left[1-\left(\frac{\theta-\theta_r}{\theta_s-\theta_r}\right)^{1/m}\right]^m\right\}^2 \tag{5.2.8}$$

式中：θ_s 为饱和含水率；θ_r 为土壤残余含水率，通常采用最大分子持水率； c，m，n 均为经验指数，其他符号意义同前。

由于土壤负压与含水率的关系曲线存在滞后现象，所以，土壤水力传导度随负压的变化也有滞后现象，即在同一负压下，脱湿过程中的土壤水力传导度高于吸湿过程中的水力传导度。但土壤水力传导度与含水率的关系受滞后作用的影响较小。

三、 非饱和带土壤水运动的基本方程

（一） 直角坐标系中的基本方程

非饱和土壤水分运动一般遵循达西定律，并符合质量守恒的连续性原理。因此，土壤水分运动基本方程可通过达西定律和连续性方程来推导。

在直角坐标系中，取土壤水分流动空间内任一点（x, y, z），并以该点为中心取无限小的微分单元体（平行六面体）。单元体的边长分别为Δx、Δy、Δz，并和相应的坐标轴平行，如图 5.4。六面体的体积为$\Delta x \Delta y \Delta z$，由于六面体很小，可近似认为各个面上每一点流速是相等的，设其流速为v_x、v_y、v_z，在 $t \sim t+\Delta t$ 时段内，流入单元体的质量为：

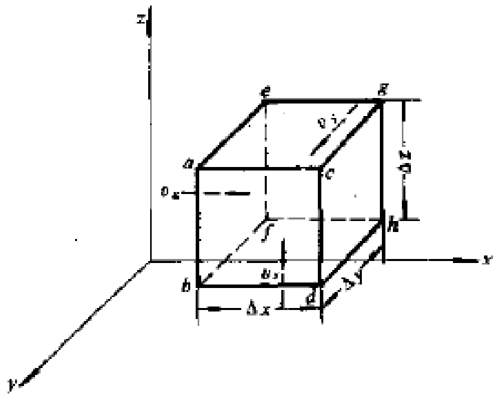


图 5.4 直角坐标系中的单元体

$$m_{入} = \rho v_x \Delta y \Delta z \Delta t + \rho v_y \Delta x \Delta z \Delta t + \rho v_z \Delta x \Delta y \Delta t \tag{5.2.9}$$

流出单元体的质量为

$$m_{出} = \rho\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta z \Delta t + \rho\left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x \Delta z \Delta t + \rho\left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta z\right)\Delta x \Delta y \Delta t \tag{5.2.10}$$

式中：ρ为水的密度；Δx、Δy、Δz 分别表示单元体在三个坐标轴方向的长度；$\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x,\ \frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y,\ \frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta z$ 分别表示水流经单元体后，其流速在 x、y、z 方向的变化值。

可得到流入流出单元体流体质量的增加值为

$$\Delta m = m_{入} - m_{出} = -\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \tag{5.2.11}$$

若用土壤含水率表示，设单元体内土壤含水率为θ，则在Δt 时间内单元体质量的变化又可表示为

$$\Delta m=\rho\frac{\partial\theta}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t \tag{5.2.12}$$

根据质量守恒原理，式(5.2.11)和(5.2.12)应相等，即

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=-\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \tag{5.2.13}$$

由达西定律

$$v_x=-K(\theta)\frac{\partial H}{\partial x},\ v_y=-K(\theta)\frac{\partial H}{\partial y},\ v_z=-K(\theta)\frac{\partial H}{\partial z} \tag{5.2.14}$$

式(5.2.13)可表示为

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[K(\theta)\frac{\partial H}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[K(\theta)\frac{\partial H}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K(\theta)\frac{\partial H}{\partial z}\right] \tag{5.2.15}$$

式中：H 为总土水势，是基质势 h 和重力势 z 之和，即 $H=h+z$。其余符号同前。

式(5.2.14)为非饱和土壤水运动基本方程。

在饱和土壤中，含水量和基质势均为常量。水力传导度也为常量，常称渗透系数，则方程(5.2.14)可写为

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=0 \tag{5.2.15}$$

式(5.2.15)为饱和土壤水运动的拉普拉斯方程。

野外实际的土壤水流往往是各式各样的，为运用基本方程分析各种实际问题的方便，可将基本方程改写成各种表达形式。以下给出基本方程的几种不同表达形式。

（1）以含水率θ 为变量的基本方程

由于基质势 h 是含水率θ 的函数，而θ 又是空间坐标 x、y、z 的函数，故 h 是 x、y、z 的复合函数。利用复合函数的求导，有 $\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}$；$\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}$；$\frac{\partial h}{\partial z}=\frac{\partial h}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}$，将其代入(5.2.14)式，并令土壤水的扩散度 $D(\theta)$为

$$D(\theta)=K(\theta)\frac{\partial h}{\partial\theta} \tag{5.2.16}$$

可得到以含水率θ 为变量的土壤水分运动的基本方程

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]+\frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \tag{5.2.17}$$

上式中，z 轴取向上为正；若 z 取向下为正时，右端第 4 项前应为负号。该方程还可表示为

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\nabla\cdot\left[D(\theta)\nabla\theta\right]+\frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \tag{5.2.18}$$

或

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\nabla\cdot\left[D(\theta)\nabla\theta\right]+\frac{\mathrm{d}K(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} \tag{5.2.19}$$

对于垂向一维土壤水分运动，方程简化为

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]+\frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \tag{5.2.20}$$

一维水平运动的情况下，重力项等于 0，方程成为

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right] \tag{5.2.21}$$

上述方程具有扩散方程的形式，故将 $D(\theta)$称为扩散度。需要注意的是，土壤水分运动本质上不是扩散运动，含水率梯度 $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ 也不是水分运动的驱动力，只是隐含地反映了基质势梯度 $\frac{\partial h}{\partial x}$ 而已。

（2）以基质势 *h* 为变量的基本方程

根据复合函数的求导原则，上述方程的左端为：$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial\theta}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial t}=C(h)\frac{\partial h}{\partial t}$，其中

$$C(h)=\frac{\partial\theta}{\partial h} \tag{5.2.22}$$

称为容水度（或称比水容量），表示单位基质势变化时的含水率变化量。

有了容水度的定义，可将方程(5.2.14)改写成以基质势 h 为因变量的基本方程

$$C(h)\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[K(h)\frac{\partial h}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[K(h)\frac{\partial h}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K(h)\frac{\partial h}{\partial z}\right]+\frac{\partial K(h)}{\partial z} \tag{5.2.23}$$

或记为

$$C(h)\frac{\partial h}{\partial t}=\nabla\cdot\left[K(h)\nabla h\right]+\frac{\partial K(h)}{\partial z} \tag{5.2.24}$$

对于一维垂向流动，方程可简化为

$$C(h)\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left[K(h)\frac{\partial h}{\partial z}\right]+\frac{\partial K(h)}{\partial z} \tag{5.2.25}$$

由于土壤水分的滞后作用，基质势和含水率不是单值函数，土壤吸湿过程和脱湿过程不同。因此，上述基本方程只能用于单一的脱湿或吸湿过程。

（3）以位置坐标 *z*（或 *x*）为因变量的基本方程

在一些较为简单的情况下，将位置坐标作为未知函数会更为方便。此时，含水率θ 以隐函数的形式表示。如以 z 为未知变量，则 z 为θ、t 的函数。

已知$\theta=\theta(z,t)$，当$\frac{\partial\theta}{\partial z}\neq 0$，可解出 $z=z(\theta,t)$，即

$$z-z\left[\theta(z,t),\ t\right]\equiv 0$$

分别对 z 和 t 求导：

$$1-\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z}=0,\qquad -\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t}-\frac{\partial z}{\partial t}=0$$

则有
$$\frac{\partial \theta}{\partial z}=\frac{1}{\dfrac{\partial z}{\partial \theta}}\quad 及\quad \frac{\partial \theta}{\partial t}=-\left.\frac{\partial z}{\partial t}\middle/\frac{\partial z}{\partial \theta}\right.$$

将以上形式代入方程(5.2.20)，得

$$-\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial \theta}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\left.D(\theta)\middle/\frac{\partial z}{\partial \theta}\right.\right]\frac{\partial \theta}{\partial z}+\frac{\partial K(\theta)}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z}$$

即
$$-\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\left.D(\theta)\middle/\frac{\partial z}{\partial \theta}\right.\right]+\frac{\partial K(\theta)}{\partial \theta}\tag{5.2.26}$$

同样可得出适用于一维水平流动、以 $x(\theta, t)$为未知函数的基本方程

$$-\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\left.D(\theta)\middle/\frac{\partial x}{\partial \theta}\right.\right]\tag{5.2.27}$$

（4）以参数 *u* 为因变量的基本方程

定义参数 u：
$$u=\left.\int_{\theta_i}^{\theta}D(\theta)\,\mathrm{d}\theta\middle/\int_{\theta_i}^{\theta_s}D(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right.=\frac{1}{U}\int_{\theta_i}^{\theta}D(\theta)\,\mathrm{d}\theta\tag{5.2.28}$$

式中，θ_i为初始含水率；θ_s为饱和含水率；$U=\int_{\theta_i}^{\theta_s}D(\theta)\,\mathrm{d}\theta$为常数。

可见，u 是含水率 θ 的函数，对(5.2.28)式求导，可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=\frac{D(\theta)}{U}\tag{5.2.29}$$

对于垂向一维土壤水分运动的方程(5.2.20)，考虑参数 u 后，有

$$\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left[D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}\right]+\frac{\partial K(\theta)}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}\tag{5.2.20′}$$

将式(5.2.29)代入式(5.2.20′)，有

$$\frac{U}{D(\theta)}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left[D(\theta)\frac{U}{D(\theta)}\frac{\partial u}{\partial z}\right]+\frac{\partial K(\theta)}{\partial \theta}\frac{U}{D(\theta)}\frac{\partial u}{\partial z}$$

整理后，得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial K(\theta)}{\partial \theta}\frac{\partial u}{\partial z}\tag{5.2.30}$$

式(5.2.30)即为以参数 u 为因变量的垂向一维土壤水分运动基本方程。同理可得出以参数 u 为因变量的水平一维土壤水分运动方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.2.31}$$

当已知 $D(\theta)$，可计算得到参数 $u(\theta)$，求解方程(5.2.30)，解得 $u(z,\ t)$，然后由 $u(\theta)$关系换算成求解结果$\theta(z,t)$。水平一维土壤水分运动的情况也类似。

（5）以参数 v 为因变量的基本方程

引入以下形式的参数 v：

$$v=\int_{h_c}^{h}K(\tau)\,\mathrm{d}\tau\bigg/\int_{h_c}^{-\infty}K(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{V}\int_{h_c}^{h}K(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{5.2.32}$$

式中：v 是基质势 h 的函数；h_c 为相应于进气值的基质势；$V=\int_{h_c}^{-\infty}K(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ 为常数。

对式(5.2.32)求导，有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}h}=\frac{1}{V}K(h)$$

由于 v 是基质势 h 的函数，对于一维垂直流动基本方程式(5.2.25)，当考虑参数 v 时，可做以下变化：

$$\frac{\partial\theta}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left[K(h)\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\right]+\frac{\partial K(h)}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial h}\frac{V}{K(h)}\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left[K(h)\frac{V}{K(h)}\frac{\partial v}{\partial z}\right]+\frac{\partial K(h)}{\partial h}\frac{V}{K(h)}\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial h}\frac{V}{K(h)}\frac{\partial v}{\partial t}=V\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial K(h)}{\partial h}\frac{V}{K(h)}\frac{\partial v}{\partial z}$$

上式消去常数 V，并引入函数$Y(v)=\frac{1}{K(h)}\frac{\partial\theta}{\partial h}=\frac{C(h)}{K(h)}=\frac{1}{D(h)}$和$X(v)=\frac{1}{K(h)}\frac{\partial K(h)}{\partial h}$，可得到以 v 为因变量的一维垂直非饱和土壤水流的基本方程：

$$Y(v)\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+X(v)\frac{\partial v}{\partial z} \tag{5.2.33}$$

若已知 $K(h)$、$D(h)$，可计算得到 $Y(v)$、$X(v)$，求解方程(5.2.33)，解得 $v(z,t)$，再由 $v(h)$关系得到最后的求解结果 $h(z,t)$。

以上不同类型的方程中，各具其特点和适用条件，以基质势 h 和以含水率θ 为因变量的方程是两种经常采用的形式，应选用哪一种合适，取决于求解问题的边界条件和初始条件。以含水率θ 为因变量的方程常用于求解均质土层或全剖面为非饱和流动问题，该方程形式对于层状土壤或求解饱和—非饱和流动问题不适用；以基质水头 h 为因变量的方程是应用较多的一种形式，可适

用于饱和—非饱和水流的求解及层状土壤的水分运动分析计算，但由于非饱和土壤水的导水率 $K(h)$及容水度 $C(h)$受滞后影响较大，计算中要注意合理选取参数，若选取不当会造成较大误差；以位置坐标为因变量的方程主要用于较简单情况下土壤水分运动问题的解析或半解析求解；以 v、u 为因变量的基本方程实际上分别相当于以基质水头 h 和含水率θ 为因变量的基本方程，在某些情况下，由于经过代换后方程变得较为简单，更易于求解。

（二） 柱坐标系中的基本方程

在求解某些土壤水分运动问题时，采用柱坐标系会更为方便。

在柱坐标系中，基本方程的推导同样采用达西定律与连续性方程相结合的方法。

建立以 z 轴为柱轴的柱坐标系，并取 z 向上为正，如图 5.5 所示。柱坐标系中任一点均由三个坐标描述，即垂直坐标 z，柱半径 r 和角坐标φ 。以柱坐标系中任一点为中心取一单元体，各坐标增量分别为Δz、Δr 和$\Delta\varphi$。

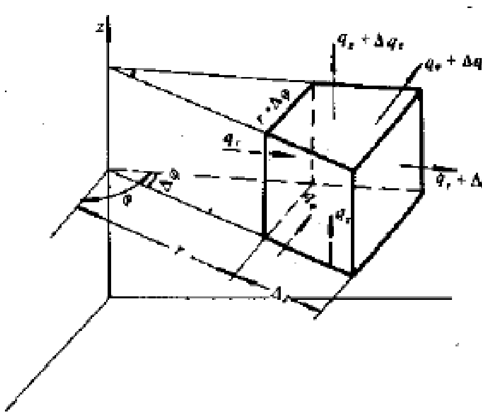


图 5.5 柱坐标系及其中的单元体（以 z 为轴）

在此坐标系中，达西定律可表示为：

$$\left.\begin{aligned} q_r &= -K(\theta)\frac{\partial H}{\partial r} \\ q_\varphi &= -\frac{1}{r}K(\theta)\frac{\partial H}{\partial \varphi} \\ q_z &= -K(\theta)\frac{\partial H}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{5.2.34}$$

式中：q_r、q_φ 、q_z 分别表示沿三个坐标方向的土壤水分通量；H 为总水势。

在假设介质骨架和水均不可压缩的情况下，可推导出在Δt 时间内沿上述三个坐标方向流入和流出单元体的水量差的总和为

$$-\left(q_r + r\frac{\partial q_r}{\partial r} + \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right)\Delta r\Delta\varphi\Delta z\Delta t \tag{5.2.35}$$

单元体体积应为$\left(r+\dfrac{\Delta r}{2}\right)\Delta r\Delta\varphi\,\Delta z$，略去高阶无穷小量后，为 $r\Delta r\Delta\varphi\Delta z$，在$\Delta t$ 时间内单

元体内水分的增量为

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} r\Delta r\Delta\varphi\Delta z\Delta t \tag{5.2.36}$$

根据水体的质量守恒原理，式(5.2.35)与式（5.2.36）应相等，即

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=-\left(\frac{1}{r}q_r+\frac{\partial q_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial q_z}{\partial z}\right) \tag{5.2.37}$$

式（5.2.37）为柱坐标系中土壤水分运动的连续性方程。将式(5.2.34)表达的达西定律代入连续性方程，即得到柱坐标系中土壤水分运动的基本方程：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{K(\theta)}{r}\frac{\partial H}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\left[K(\theta)\frac{\partial H}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[K(\theta)\frac{\partial H}{\partial \varphi}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K(\theta)\frac{\partial H}{\partial z}\right] \tag{5.2.38}$$

代入总水势 $H=h+z$、扩散度 $D(\theta)$等，并简化后得基本方程为：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rD(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial \varphi}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial z}\right]+\frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \tag{5.2.39}$$

对于平面轴对称问题，上式成为

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rD(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial r}\right] \tag{5.2.40}$$

同理，可推得以 x（或 y）轴为柱轴的柱坐标系的基本方程：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial t}=&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rD(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial \varphi}\right]\\&+\cos\varphi\frac{\partial K(\theta)}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial K(\theta)}{\partial \varphi}+\frac{\partial}{\partial x}\left[D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]\end{aligned} \tag{5.2.41}$$

关于球坐标系中的基本方程应用较少，推导方法同上。

四、 非饱和土壤中水、汽、热耦合运移方程

以上模型都是在等温条件下建立起来的。然而在自然条件下，土壤水分的转化和运移并非在等温条件下进行，土壤中含水率的非均匀分布和时空变化会引起土壤中各点的热特性参数（比热容和热导率等）各不不同，并随时间变化。土壤中的热流及温度的分布和变化也会对土壤水的运移和转化产生影响。此外，由温度差形成的温度势梯度本身也可导致水分的流动。为此，当对土壤水的研究涉及农田蒸发蒸腾的能量转换、地表覆盖物的温度效应、农田土壤冻融作用等方面时，必须考虑水、汽、热耦合运移模型。

以 Philip 和 de Vries（de Vries，1958； de Vries and Philip，1957）为代表的学者应用微观力学机制建立了多孔介质中水、汽、热耦合运移模型，该模型包括水分运移方程和热运移方程，利用两个方程耦合求解，得到水分运动的解。本节简要给出其模型。

（一） 水分运移方程

土壤中水分的总通量 q_m 可表示为

$$q_m = q_l + q_v = -\rho_l K \nabla (h+z) - D \nabla \rho_v \tag{5.2.42}$$

式中：q_l、q_v 分别为液态水及水汽的通量；ρ_l、ρ_v 分别为水、汽的密度；K 为导水率；D 为水汽扩散系数；h 为土壤水基质势；z 为垂向坐标。

考虑吸湿热对于压力场的作用，在式(5.2.42)中增加温度梯度对水分通量的影响，得到：

$$q_m = q_l + q_v = -\rho_l K \nabla (h+z) - D \nabla \rho_v - \rho_l D_{Ta} \nabla T \tag{5.2.43}$$

式中：T 为温度；D_{Ta} 为温度梯度作用下吸附水流的运移系数。单位体积土壤中的总水量为：$\rho_l \theta + \rho_v \theta_a$，其中$\theta$、$\theta_a$ 分别为土壤体积含水率及含气率，$\theta + \theta_a = n$，n 为孔隙率。根据质量守恒原理，有：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_l \theta + \rho_v \theta_a) = -\nabla \cdot q_m$$

将式(5.2.43)代入上式后，经整理，得到水分运动方程

$$S_h \frac{\partial h}{\partial t} + S_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot [(K + D_{hv}) \nabla h + (D_{Tv} + D_{Ta}) \nabla T] + \frac{\partial K}{\partial z} \tag{5.2.44}$$

其中

$$S_h = \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l}\right) \left.\frac{\partial \theta}{\partial h}\right|_T + \frac{\theta_a}{\rho_l} \left.\frac{\partial \rho_v}{\partial h}\right|_T$$

$$S_T = \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l}\right) \left.\frac{\partial \theta}{\partial T}\right|_h + \frac{\theta_a}{\rho_l} \left.\frac{\partial \rho_v}{\partial T}\right|_h$$

式中：D_{hv} 为基质势梯度作用下水汽的给水系数；D_{Tv} 为温度梯度作用下水汽的给水系数。

（二） 热运移方程

多孔介质中任一点处的热通量为

$$q_h = -\lambda \nabla T - \rho_l L D_{hv} \nabla h + C_l (T - T_0) q_m \tag{5.2.45}$$

式中：λ为土壤的热传导系数[$Jcm^{-1}°C^{-1}s^{-1}$]；L 为水的蒸发潜热[Jg^{-1}]；C_l 表示水的比热[$Jcm^{-3}°C^{-1}$]；T_0 为参照系的温度。土壤的热传导系数可以表示为：

$$\lambda = \sum_{i=1}^{5} k_i \theta_i \lambda_i / \sum_{i=1}^{5} k_i \theta_i \tag{5.2.46}$$

式中：i=1，2，3，4，5 分别表示水、汽、石英、有机质和其他物质组分；k_i 为各组分中固体颗粒的温度梯度与水体温度梯度之比；λ_i、θ_i 为各组分热传导系数和组分体积份数。各参数的计算方法可参见 Milly（1982，1984）。

在单位体积多孔介质中的总热量为：

$$Q = C(T - T_0) + L_0 \rho_v \theta_v - \rho_l \int_0^{\theta_l} W d\theta \qquad (5.2.47)$$

式中：$C = \sum_{i=1}^{5} C_i \theta_i$ 为含水、汽介质中的热容量(cal/cm^3)，C_i 为各组分体积热容量；L_0 表示在参考温度 T_0 下的蒸发潜热(cal，在 T_0=20℃时 L_0=585ca1/g)；W 为微分吸湿热；蒸发潜热 L 和微分吸湿热 W 可以表示为（de Vries，1958；de Vries and Philip，1957；Milly，1982，1984）：

$$L = L_0 + (C_v - C_l)(T - T_0) \qquad (5.2.48)$$

$$W = -j^{-1} g(h - T\frac{\partial h}{\partial T}) \qquad (5.2.49)$$

式中：C_v 为常温下水蒸汽比热；C_l 为水的比热；j 为热功当量；g 重力加速度。

热量连续性方程可以表示为

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\nabla q_h \qquad (5.2.50)$$

将式（5.2.45）和式（5.2.47）代入式（5.2.50）得到土壤中热量守恒方程：

$$C_h \frac{\partial h}{\partial t} + C_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T) + \nabla(\rho_l L D_{HV} \nabla h) - \nabla(C_l (T - T_0) q_m) \qquad (5.2.51)$$

式中：

$$C_T = C + H_1 \frac{\partial \rho_v}{\partial T}\bigg|_h + H_2 \frac{\partial \theta_l}{\partial T}\bigg|_h$$
$$C_h = H_1 \frac{\partial \rho_v}{\partial T}\bigg|_T + H_2 \frac{\partial \theta_l}{\partial T}\bigg|_T$$
$$H_1 = (T - T_0) C_v \theta_v + L_0 \theta_v$$
$$H_2 = (T - T_0)(C_l \rho_l - C_v \rho_v) - L\rho_v - \rho_l W$$

式（5.2.44）和式（5.2.51）及其相应的定解条件组成了水、汽、热耦合运动的定解问题。对于一维问题，以上两方程可以简化为：

$$S_h \frac{\partial h}{\partial t} + S_T \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[(K + D_{hv})\frac{\partial h}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[D_{Tv} \frac{\partial T}{\partial z}\right] + \frac{\partial K}{\partial z} \qquad (5.2.52)$$

$$C_h \frac{\partial h}{\partial t} + C_T \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_l L D_{HV} \frac{\partial h}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}(C_l (T - T_0) q_m) \qquad (5.2.53)$$

由于方程中系数也为 h 和 T 的函数，方程具有高度的非线性，可利用迭代法求解（杨金忠和蔡树英，1989）。

第三节 入渗条件下的非饱和土壤水分运动

水分入渗是指水分通过不同方式进入土壤的过程，是自然界水循环中的重要一环。研究土壤

水分入渗过程是水资源评价、农田水分状况调控以及土壤、水环境保护等研究工作的基础。

一、 水向土壤的入渗过程

降雨和灌溉水是引起土壤入渗的主要来源，入渗强度的大小取决于供水的特性（降雨或灌水的方式和强度）和土壤的渗水性能，以及二者的关系。如果土壤渗水性能大于外界供水强度，入渗强度主要决定于外界供水强度，在入渗过程中表土含水率随入渗而逐渐增大，直至达到某一稳定值。如果供水强度超过了土壤渗水能力，入渗强度最大不能超过土壤的入渗能力，此时会形成地表积水或径流。这两种情况在入渗过程中是可以转化的。

土壤的入渗能力也是变化的。初始含水率和土壤吸力不同的土壤，其入渗能力不同，土壤越干燥，入渗能力越强；在入渗初期，土壤比较干燥，入渗能力强，随着入渗的进行，土壤水的入渗速率逐渐减小，最后接近于一常量，达到稳定入渗阶段。

在初始表土干燥的情况下，水势梯度较陡，入渗速率较大，但随着入渗水进入土中，土壤基质势下降，入渗速率趋于减小。对于垂直入渗的条件，如果供水强度较大，使土壤剖面上达到饱和，当入渗强度等于土壤饱和水力传导度时，就达到稳定入渗阶段。若供水强度小于饱和土壤水力传导度时，达到稳定入渗阶段的入渗强度将等于该湿度条件下的非饱和土壤传导度。

入渗过程中，土壤剖面上水分分布与土表入渗条件有关。以垂直入渗情况为例。若表土初始为干土状态（初始含水率均匀分布，为θ_i）开始积水，土壤含水率$\theta(z,t)$的分布随时间的变化有以下特点（图 5.6）：

① 在水施加于土壤表面后的很短时间内，表土含水率$\theta(0,t)$迅速由初始值θ_i增大到某一最大值θ_0（但小于饱和含水率θ_s），表层以下土壤仍保持初始含水率。此时，表土处（z =0）含水率梯度很大，有：当 $t=0, \left|\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|\to\infty$。

② 继续入渗，湿润锋不断下移，含水率梯度减小，曲线逐渐平缓。

③ 当入渗时间足够大时，$\left|\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|\to 0$，即接近地表处，含水率不变。

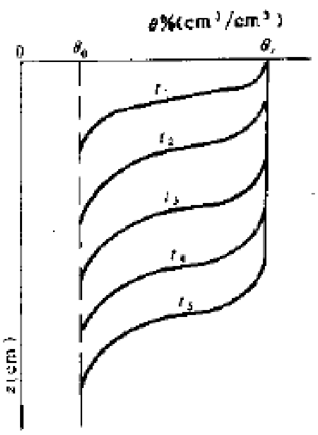


图 5.6　　入渗条件下剖面含水率的分布

入渗量的大小一般用入渗率 i 和累积入渗量 I 来表示。入渗率是单位时间内通过地表单位面

积入渗到土壤中的水量[L/T]，任一时刻 t 的入渗率 $i(t)$与此时地表处的土壤水分运动通量 $q(0,t)$相等，即

$$i(t)=q(0,t)=\left[-D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}+K(\theta)\right]_{z=0} \tag{5.3.1}$$

这里 z 坐标取向下为正。

累积入渗量（或称入渗量）是入渗开始后一定时间内，通过地表单位面积入渗到土壤中的总水量[L]，为

$$I(t)=\int_0^L[\theta(z,t)-\theta(z,0)]\mathrm{d}z \tag{5.3.2}$$

式中：L 为土层厚度[L]；$\theta(z,0)$为初始含水率分布。

显然，入渗率 $i(t)$与入渗量 $I(t)$之间有如下关系：

$$I(t)=\int_0^t i(t)\mathrm{d}t \tag{5.3.3}$$

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} \tag{5.3.4}$$

二、 土壤水入渗线性化方程的近似解

对于一维垂直入渗情况，初始剖面含水率θ_i 均匀分布，地表有一薄水层，表层含水率等于饱和含水率θ_s，地下水埋深较大，计算时段内入渗水不会到达下边界。该条件下的土壤水分运动定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\theta}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial z}\left[D(\theta)\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\right]-\dfrac{\partial K(\theta)}{\partial z} \\ \theta(z,0)=\theta_i \\ \theta(0,t)=\theta_s & z=0,\ t>0 \\ \theta(z,t)=\theta_i & z\to\infty,\ t>0\end{cases} \tag{5.3.5}$$

可见，上述定解问题中的支配方程为非线性方程，求解比较困难，为简化计算，近似用平均扩散度 $\overline{D}$ 代替 $D(\theta)$，并以 $N=\dfrac{K(\theta_s)-K(\theta_i)}{\theta_s-\theta_i}$ 代替 $\dfrac{\partial K(\theta)}{\partial\theta}$，则上述支配方程可简化为

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\overline{D}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}-N\frac{\partial\theta}{\partial z} \tag{5.3.6}$$

式(5.3.6)为常系数线性方程，用拉普拉斯变换求得含水率θ 的解为

$$\theta(z,t)=\theta_i+\frac{(\theta_s-\theta_i)}{2}\left[\mathrm{erfc}\left(\frac{z-Nt}{2\sqrt{\overline{D}t}}\right)+\mathrm{e}^{\frac{Nz}{\overline{D}}}\mathrm{erfc}\left(\frac{z+Nt}{2\sqrt{\overline{D}t}}\right)\right] \tag{5.3.7}$$

式中，erfc( )为补余误差函数，可查表得到。$\overline{D}$ 可用下式计算：

$$\overline{D}=\frac{5/3}{\left(\theta_s-\theta_i\right)^{5/3}}\int_{\theta_i}^{\theta_s}D(\theta)\left(\theta-\theta_i\right)^{2/3}\mathrm{d}\theta \tag{5.3.8}$$

三、 入渗问题的 Green-Ampt 模型

Green-Ampt 于 1911 年提出了基于毛管理论的入渗模型，即 Green-Ampt 模型。所研究的是在初始干燥的土壤具有薄层积水时的入渗问题。假定在入渗过程中存在明显的水平湿润锋面，将湿润区和未湿润区截然分开，湿润区的土壤含水率为均一的饱和含水率θ_s，锋前的未饱和区土壤含水率即为均一的初始含水率θ_i，入渗过程中，湿润锋的推移如同活塞推进，故又称活塞模型。

设地表积水层厚度始终保持为 H，湿润锋的位置为 z_f，随入渗时间增加，z_f 不断下移，锋面上各点的土壤水吸力均为 S_f，为某一定值。目的是求取入渗率 i、入渗量 I 及湿润锋面位置 z_f 与时间 t 的关系。

以地表作为原点，取 z 坐标轴向下为正。则地表处的总水势为 H，湿润锋面处的总水势为 $-(S_f+z_f)$。由达西定律可求出水分自地表进入土壤的通量，即地表处的入渗率 i

$$i=K\left(\theta_s\right)\frac{z_f+S_f+H}{z_f} \tag{5.3.9}$$

式(5.3.9)表示在单位时间内，通过单位面积渗入土体的水量。根据水量平衡原理，应等于土体内增加的水量：$\Delta q=\frac{\mathrm{d}z_f}{\mathrm{d}t}\Delta\theta=\frac{\mathrm{d}z_f}{\mathrm{d}t}\left(\theta_s-\theta_i\right)$，即

$$\frac{\mathrm{d}z_f}{\mathrm{d}t}=\frac{K\left(\theta_s\right)}{\theta_s-\theta_i}\cdot\frac{z_f+S_f+H}{z_f} \tag{5.3.10}$$

对上式积分，并利用 $t=0$ 时 $z_f=0$，得到

$$t=\frac{\theta_s-\theta_i}{K\left(\theta_s\right)}\left[z_f-\left(S_f+H\right)\ln\frac{z_f+S_f+H}{z_f+H}\right] \tag{5.3.11}$$

根据模型假定，可得出累积入渗量 $I(t)$与湿润锋 $z_f(t)$的关系

$$I=\left(\theta_s-\theta_i\right)z_f \tag{5.3.12}$$

在入渗初期，即 t 很小时，有 $z_f<<S_f+H$，式(5.3.10)的 z_f+S_f+H 中的 z_f 可略去，有

$$\frac{\mathrm{d}z_f}{\mathrm{d}t}=\frac{K\left(\theta_s\right)}{\theta_s-\theta_i}\cdot\frac{S_f+H}{z_f}$$

令

$$\overline{D}=K\left(\theta_s\right)\cdot\frac{S_f+H}{\theta_s-\theta_i} \qquad 5.3.13)$$

为湿润区内某种平均的或有效的土壤水扩散率，代入上式，有

$$\frac{\mathrm{d}z_f}{\mathrm{d}t}=\frac{\overline{D}}{z_f}$$

积分后得到 z_f 与 t 的近似关系式（当 t 很小时）

$$z_f=\sqrt{2\overline{D}t} \tag{5.3.14}$$

将式(5.3.14)代入式(5.3.12)，得 $I\sim t$ 的近似关系式

$$I=(\theta_s-\theta_i)\sqrt{2\overline{D}t} \tag{5.3.15}$$

对上式求导，得 $i\sim t$ 的近似关系式

$$i=(\theta_s-\theta_i)\sqrt{\frac{\overline{D}}{2t}} \tag{5.3.16}$$

当入渗时间很长，即 t 很大时，有 $z_f>>S_f+H$，则 $\frac{z_f+S_f+H}{z_f}\approx 1$，从而有

$$i=K(\theta_s) \tag{5.3.17}$$

此时，入渗率近似等于土壤饱和渗透系数。

四、 水平入渗条件下的 Phillip 解

水平入渗条件下的 Phillip 解是一种半解析方法，即前半部用解析法，用 Boltzmann 变换将偏微分方程转换为常微分方程；后半部用 Phillip(1955)提出的迭代方法求解常微分方程。由于求解过程中未进行过分简化，求得的结果较为严密，常作为精确解来验证数值计算或其他方法所得的结果。

（一） 水平入渗的常微分方程推求

基于第一类边界条件的水平入渗的定解问题可描述为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\theta}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[D(\theta)\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right] & \\ \theta=\theta_i & t=0,\ x>0 \\ \theta=\theta_0 & t>0,\ x=0 \\ \lim\limits_{x\to\infty}\theta=\theta_i & t>0,\ x\to\infty\end{cases} \tag{5.3.18}$$

改写上述问题中的基本方程为以距离坐标 $x(\theta, t)$为变量的方程，即方程(5.2.27)

$$-\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[D(\theta)\Big/\frac{\partial x}{\partial\theta}\right] \tag{5.2.27}$$

采用 Boltzmann 变换，引入变量$\lambda(\theta)$，令$\lambda(\theta)=x(\theta,t)t^{-1/2}$，即$x(\theta,t)=\lambda(\theta)t^{1/2}$，对后者分别求偏导数$\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial x}{\partial \theta}$，将其结果代入式(5.2.27)，整理后得土壤水分运动的常微分方程

$$\lambda(\theta)=-2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[D(\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda(\theta)}\right] \tag{5.3.19}$$

相应的边界条件为

$$\text{当}\, t=0,\ x>0\,\text{时},\quad \theta=\theta_i\,,\ \lambda\to\infty;$$
$$\text{当}\, t>0,\ x=0\,\text{时},\quad \theta=\theta_0\,,\ \lambda=0;$$

为了求得$\lambda\sim\theta$关系式，对方程(5.3.19)两端自θ_i至θ积分，并考虑边界条件，在$\theta=\theta_i$处，有$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}=0$，从而得到

$$\int_{\theta_i}^{\theta}\lambda(\theta)\mathrm{d}\theta=-2D(\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} \tag{5.3.20}$$

式(5.3.20)为$\lambda\sim\theta$关系式，若已知扩散率$D(\theta)$的表达形式，即可由上式求得$\lambda\sim\theta$关系式，再根据$\lambda(\theta)=x(\theta,t)t^{-1/2}$关系，求得$\theta(x,t)$，从而求得剖面上任何时间 t、任何距离 x 的含水率分布。

（二） 迭代计算方法

Philip 采用迭代方法求解方程(5.3.20)。设待求的$\lambda\sim\theta$关系曲线如图 5.7，将含水率自θ_0至θ_i分成 n 等份，步长为$\Delta\theta=(\theta_0-\theta_i)/n$，各等分点的含水率依次为$\theta_0$，$\theta_1$，$\theta_2$，…，$\theta_r$，…，$\theta_{n-1}$，$\theta_n$（$=\theta_i$），相应等分点处的值为$\lambda_0$，$\lambda_1$，$\lambda_2$，…，$\lambda_r$，…，$\lambda_{n-1}$，$\lambda_n$（$=\infty$）；两相邻等分点中点处的扩散率依次为$D_{1/2},D_{1+1/2},\cdots,D_{r+1/2},\cdots,D_{(n-1)+1/2}$。若已知$D(\theta)$关系，可由下式求出$D_{r+1/2}$：

$$D_{r+1/2}=\frac{1}{\Delta\theta}\int_{\theta_{r+1}}^{\theta_r}D(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{5.3.21}$$

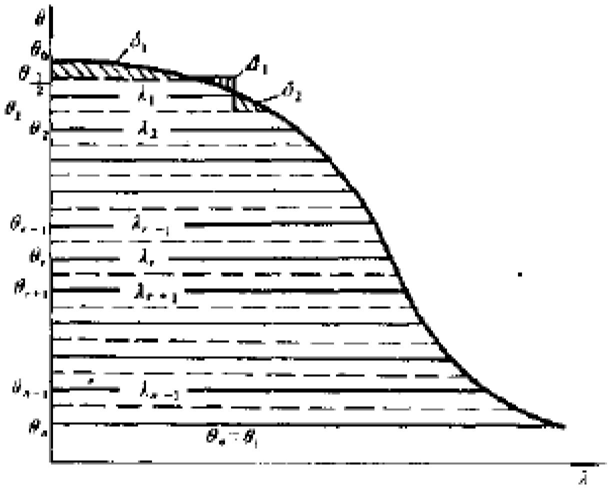


图 5.7 $\lambda\sim\theta$ 关系曲线示意图

当 n 值足够大时，对描述 $\theta_{r+1/2}$ 点的方程(5.3.20)可用差分形式近似，即

$$\int_{\theta_n}^{\theta_{r+\frac{1}{2}}} \lambda \,\mathrm{d}\theta = 2D_{r+\frac{1}{2}} \frac{\Delta\theta}{\lambda_{r+1}-\lambda_r} \tag{5.3.22}$$

变换后得

$$\lambda_{r+1} = \lambda_r + 2D_{r+\frac{1}{2}} \frac{\Delta\theta}{\int_{\theta_n}^{\theta_{r+\frac{1}{2}}} \lambda \,\mathrm{d}\theta} \qquad (r = 0, 1, 2, \cdots, n-2) \tag{5.3.23}$$

第四节　蒸发条件下的土壤水分运动

一、　土面蒸发、植物蒸腾和潜水蒸发

土壤水分蒸发可以发生在土壤表面和植物体上。土壤表面的蒸发称为土面蒸发，植物体的蒸发一般称为植物蒸腾。本节主要涉及土面蒸发条件下的土壤水分运动。

土面蒸发所消耗的水分来自两部分：一部分是直接消耗地下水面以上土层中的水分，另一部分是消耗地下水，后者称为潜水蒸发。土壤水分蒸发有稳定蒸发和非稳定蒸发两种状态，当土壤水分蒸发量与地下水补给量相平衡时为土壤水分的稳定蒸发状态，一般在连续干旱期，且地下水有侧向补给时会出现这种情况；当土壤水蒸发量不等于地下水补给量时，土壤水分处于不稳定蒸发状态，在降雨或灌水后的蒸发初期或地下水无侧向补给时，常呈现这种状态。

土面蒸发的形成及蒸发强度的大小取决于两方面因素：一是外界条件，如辐射、气温、湿度及风速等气象因素的影响，称为大气蒸发能力，它决定了水分蒸发过程中能量的供给，并影响着蒸发表面水汽向大气的扩散过程；二是土壤内部条件，包括土质条件、表土含水率的大小及分布

等，这是土壤水分向上输送的条件，也即土壤的供水能力。当土壤能充分供水时，由大气蒸发能力决定的最大可能蒸发强度称为潜在蒸发强度，有时近似用水面蒸发强度 E_0 来代表。

由于土面蒸发的主要影响因素不同，使得在蒸发过程的不同阶段呈现出不同的特点及规律。

（一） 形成干土层前的表土蒸发过程

（1） 表土蒸发强度保持稳定的阶段

在蒸发的初始阶段，地表的含水率比较高，当高于某一临界值 θ_k 时，尽管由于蒸发使表土含水率有所降低，但地表处的水汽压仍可维持或接近于饱和水汽压，若外界气象条件维持不变，水汽压梯度基本上没有变化，则含水率的减小并不影响水汽的扩散通量。而从土壤内部来看，表土含水率的减小虽使得土壤导水率有所降低，但也使土壤中向上的吸力梯度增加了，两者的抵消仍可满足土壤向地表充分供水。因此，在这个阶段，表土的蒸发强度不随土壤含水率降低而变化，故称为稳定蒸发阶段。该阶段的蒸发强度大小与土壤含水率无关，主要决定于大气蒸发能力，可近似为水面蒸发强度 E_0。这一阶段土壤含水率的下限（临界含水率 θ_k）是蒸发强度与土壤毛管输水能力的平衡点，也即毛管输水能力显著降低之点，其值大小决定于外界条件和土壤性质。对于一般细粒结构的土壤，θ_k 大约相当于田间持水率的 60％～70％；对呈团粒结构的土壤，θ_k 约为田间持水率的 90％～95％。

（2） 表土蒸发强度随土壤含水率变化的阶段

当表土含水率低于临界含水率 θ_k 以下时，土壤导水率将随含水率的降低而减小，导致土壤输水能力降低，表层土壤蒸发消耗的水分得不到补充，表土含水率进一步减小，蒸发强度随之减弱；另一方面，随着表土含水率的减小，地表处的水汽压也降低，也导致蒸发强度减弱，从而出现了表土蒸发强度随表土含水率降低而递减的阶段。

（二） 形成干土层后的表土蒸发

当表土含水率很低，达到凋萎系数与最大吸湿水之间时，土壤水分运动主要是薄膜形式，输水能力极弱，无法补充表土蒸发损失的水分，表层逐渐形成干土层。此时，蒸发面从土壤表层下移到土壤内部的干土层以下，蒸发形成的水汽以汽态扩散方式穿过干土层进入大气，导致水汽运移路径加长，压力坡降减小，水汽扩散能力降低，蒸发强度也相应减小。蒸发强度的大小主要取决于干土层内水汽的扩散能力以及干土层厚度。

二、 蒸发条件下土壤水运动的数学模型

（一） 稳定蒸发模型

若在一定的时间段内，日均外界蒸发条件基本不变，且地下水位保持相对稳定，土面蒸发量与潜水向上部土壤的补给量大体平衡时，地下水面以上的土壤水分运动可近似为稳定状态，此时的土壤水蒸发等于潜水蒸发。处于稳定蒸发时，不仅地表的蒸发强度恒定，且土壤含水率也不随

时间变化。这种状态只可能发生在气象条件不变，地下水位埋藏较浅，有侧向补给以保证地下水位不变的情况下。显然，绝对的稳定蒸发在自然界是很难出现的。

对于均质土壤，稳定蒸发条件下垂直一维地下水运动的定解问题可描述为

$$\begin{cases}-D(\theta)\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}-K(\theta)=E\\ \theta=\theta_s\,, \qquad z=0\end{cases} \tag{5.4.1}$$

式中：E 为表土蒸发强度[m^3/d 或 m/d]；θ_s 为土壤饱和含水率；z 为垂直坐标，原点位于地下水面，取向上为正。积分求解该定解问题，可得

$$z=\int_{\theta}^{\theta_s}\frac{D(\theta)}{K(\theta)+E}\mathrm{d}\theta \tag{5.4.2}$$

若用负压水头 h 表示，上述问题成为

$$\begin{cases}K(h)\left(\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z}-1\right)=E\\ h=0\,, \qquad z=0\end{cases} \tag{5.4.3}$$

相应于方程(5.4.2)的结果，有

$$z=\int\frac{1}{1+E/K(h)}\mathrm{d}h \tag{5.4.4}$$

若已知水力传导度 K 与负压 h 的关系式，代入方程(5)中积分，即可求得 $z\sim h$ 关系式。常用的 $K\sim h$ 关系式参见式(5.2.3)、(5.2.4)和(5.2.5)。

在稳定蒸发情况下，潜水蒸发强度、土壤水分通量和土面蒸发强度是相等的。而潜水蒸发是水文和水资源评价计算中的重要部分之一，国内外学者进行过大量研究，提出了一些计算潜水蒸发的经验公式，常用的有以下几种。

阿维里扬诺夫公式：

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}=\left(1-\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^n \tag{5.4.5}$$

式中：ε 为潜水蒸发强度；ε_0 为计算时段内的水面蒸发强度；Δ 为地下水埋深；Δ_0 为停止潜水蒸发时地下水埋深，也称蒸发极限地下水埋深；n 为与土壤质地有关的经验指数，通常取 1~3。

叶水庭等（1982）提出了一个较为简单的潜水蒸发强度的计算公式：

$$\varepsilon=\varepsilon_0\,\mathrm{e}^{-\alpha\Delta} \tag{5.4.6}$$

式中：α为经验指数；其余符号意义同前。

张朝新等（1984）[]给出了以下经验公式：

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}=a(\Delta+N)^{-b} \tag{5.4.7}$$

式中：a、b 分别为反映土壤质地和地区特点的经验常数；N 为反映潜水蒸发系数与地下水埋深关系的经验常数，一般在 1～2 之间取值。

雷志栋等（1984）通过分析潜水蒸发与水面蒸发和地下水埋深之间的关系，得出了如下计算公式：

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max}\left[1 - \mathrm{e}^{-\left(\eta\varepsilon_0 / \varepsilon_{\max}\right)}\right] \tag{5.4.8}$$

式中：$\varepsilon_{\max}$为最大极限蒸发强度，随埋深而变，$\varepsilon_{\max} = \alpha \Delta^{-\beta}$；$\eta$表示当水面蒸发强度$\varepsilon_0$＝0 时潜水蒸发强度$\varepsilon$与水面蒸发强度$\varepsilon_0$关系曲线上的斜率；$\alpha$、$\beta$ 均为反映土壤性质的参数。

（二） 非稳定蒸发模型

当潜水对上部土壤补充的水分不能满足土壤因蒸发而失掉的水分时，表层土壤含水率将不断减小，此时的蒸发是非稳定的。以下给出两种有代表性情况的非稳定蒸发模型。

（1） 表土蒸发强度随地表含水率递减状况下的非稳定蒸发模型

对于表土蒸发强度随含水率降低而减少的蒸发阶段，设表土蒸发强度 E 随地表含水率的降低呈直线关系减小，若初始含水率θ_0为均匀分布，其数学模型为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left[D(\theta)\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\right] - \dfrac{\partial K(\theta)}{\partial z} \\ \theta = \theta_0 & t = 0,\ z \ge 0 \\ D(\theta)\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = E & t > 0,\ z = 0 \\ \theta = \theta_0 & t > 0,\ z \to \infty \end{cases} \tag{5.4.9}$$

式中：z 坐标取向下为正；表土蒸发强度 $E=E_0(a\theta+b)$，a、b 为参数。

上述问题中的方程为非线性方程，可进行线性化后近似求解。

（2） 表土瞬时变干时非稳定蒸发模型

当大气蒸发能力很大时，地表会迅速变干，表土含水率由初始值θ_0瞬时降低为某一风干含水率θ_i，此时可视地表边界条件为第一类边界条件。在土壤垂直剖面中，在蒸发初期阶段和在重力坡降比土壤的负压坡降小得多的后期阶段，重力项可忽略不计。当忽略重力作用时，表土瞬时变干的土壤水分运动定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left[D(\theta)\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\right] \\ \theta = \theta_0 & t = 0,\ z \ge 0 \\ \theta = \theta_i & t > 0,\ z = 0 \\ \theta = \theta_0 & t > 0,\ z \to \infty \end{cases} \tag{5.4.10}$$

Gardner(1958)提出了对该问题的半解析求解方法，也可以经线性化处理后再求解。

目前国内外已开发了大量求解饱和-非饱和水流运动的通用程序和商业软件，多数通用程序和商业软件中非饱和水分运动和溶质运移同时求解，因此有关非饱和渗流问题的实用程序和模型的介绍放在第六章与溶质运移问题一起介绍。

第六章　地下水溶质运移模型

地下水并不是完全的纯水，而是含有一定溶质的水溶液。介质或土壤中含有大量的溶质，会导致地下水水质恶化、土壤盐碱化、土壤污染等一系列水土环境问题，严重影响人类生活和生产的发展。为了保护我们赖以生存的水土环境，必须采取合理有效的防治措施，其前提是掌握溶质在多孔介质中运移的基本规律，从而预测其时空分布和变化。

地下水中的溶质处在一个物理、化学和生物的相互联系和连续变化的系统中，其运动十分复杂。研究地下水溶质运移问题的基本理论是多孔介质中的水动力弥散理论。

第一节　多孔介质中的水动力弥散

一、 水动力弥散现象

在多孔介质中，当存在两种或两种以上可溶混的流体时，在流体运动作用下，流体间会出现过渡带，并使不同流体浓度趋于均一化，这种现象称多孔介质的水动力弥散现象（陈崇希，1996）。水动力弥散现象可用一个简单的实验来说明。

考虑一个被水饱和的均质砂柱中的稳定流动。设在某一初始瞬间（t=0），由含有示踪剂浓度为 C_0 的溶液去驱替砂柱中原来不含示踪剂的溶液，在砂柱末端测量示踪剂浓度的变化 $C(t)$，并绘制示踪剂相对浓度 $C\left(t\right)/C_0$ 与观测时间 t 的关系曲线，称这种相对浓度过程线为穿透曲线，如图 6.1 所示。如果不存在弥散现象，穿透曲线应呈现出图 6.1 中虚线所示的活塞式曲线，即以平均流速移动的直立锋面。而实际上，由于水动力弥散作用，使两种溶液的混合超前于驱替的平均流速，穿透曲线显示出的是图 6.1 中实线所示的“S”形曲线。

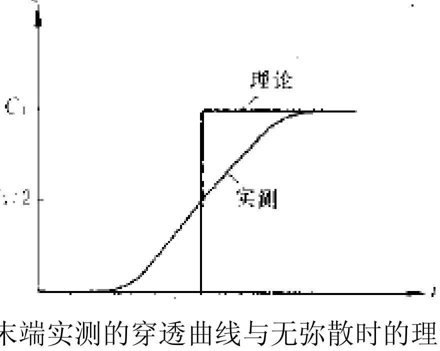


图 6.1 砂柱末端实测的穿透曲线与无弥散时的理论穿透曲线

二、 水动力弥散的机理

溶质在多孔介质中的运移可由两种过程进行描述，由平均流速所携带溶质的对流运移（实际上这种作用并不出现，为描述和计算方便而引入）和由水动力弥散作用而引起溶质的分散。

（1）溶质的对流运移

地下水中的溶质随着地下水的运动而产生运移的现象称为对流。单位体积地下水溶液中所含有的溶质质量，称为溶质的浓度，记为 C。单位时间内通过土壤（或含水层）单位过水断面的溶质质量称为溶质通量，溶质的对流通量，用 J_C 表示，则有

$$J_C = qC = v\theta C \tag{6.1.1}$$

式中：q 为土壤水流通量（L/T）；v 表示土壤水溶液的平均孔隙流速（L/T）；θ 为土壤含水量，对于饱和土壤，θ 即为土壤孔隙度 n。

（2）溶质的水动力弥散

水动力弥散是大量个别的溶质质点通过介质孔隙的实际运移过程，及因此而发生于孔隙中的各种物理和化学现象的宏观反映。溶质的水动力弥散由两部分组成，即分子扩散和机械弥散（或对流扩散）。

分子扩散是由于液体中浓度梯度的存在而引起的一种物质运移现象。浓度梯度使高浓度处的物质向低浓度处运移，以求浓度达到均一。分子扩散的本质是由于分子热运动，而与流速无关，即使水为静止的，只要存在浓度梯度，分子扩散作用就会发生。

与自由溶液中类似，土壤水中溶质的分子扩散通量（用 J_d 表示）也服从费克（Fick）第一定律，只是由于多孔介质的存在，饱和土壤水也仅仅充满土壤的孔隙（孔隙度为 n），故饱和土壤水中溶质的分子扩散通量为

$$J_d = -nD_s\frac{\partial c}{\partial L} \tag{6.1.2}$$

对于非饱和土壤水，用含水率 θ 代替孔隙度 n，溶质的分子扩散通量成为

$$J_d = -\theta D_s\frac{\partial c}{\partial L} \tag{6.1.3}$$

式中：D_s 为土壤水中溶质分子扩散系数（L^2/T）；L 为扩散方向的距离（L）；$\frac{\partial c}{\partial L}$ 为沿扩散方向的溶质浓度梯度。在土壤多孔介质中，液相仅占土壤总容积的一部分，分子扩散系数远比在自由溶液中的要小。随着土壤含水率的降低，液相所占区域减少，实际扩散的途径加长，因此其分子扩散系数趋向减小。一般也将溶质在土壤中的分子扩散系数仅表示为含水率的函数 $D_s(\theta)$，而与溶质的浓度无关。

机械弥散（mechanical dispersion, convective diffusion）是由于土壤颗粒和孔隙在微观尺度上的不均匀性而导致溶质在流动过程中逐渐分散，并占有越来越大的渗流区域范围的溶质运移现象，是指微观尺度上质点流速相对于孔隙平均流速的差异所引起的溶质分散现象，这种作用起因于固体骨架的结构及微观流速对于流体质点运动的影响，反映了空隙介质骨架结构的特征。机械弥散作用由三种机理引起：①流体的黏滞性，以及粗糙的孔隙表面作用在流体上的阻力，使单个孔隙

通道横断面的不同点上，流体分子在流动过程中具有不同流速，因而在单个孔道中会产生分散；②由于孔隙大小及光滑程度不同，沿不同孔隙轴向的最大流速有差异；③由于孔隙通道的曲折性、交叉性和分支性，使流线沿平均方向出现偏差。宏观上土壤水分流动区域的渗透性不均一，也可促成或加剧机械弥散的作用。实验证明，机械弥散也服从费克（Fick）第一定律。由机械弥散引起的溶质通量 J_h 也可表示为类似的形式，对非饱和土壤水，有

$$J_h = -\theta D_h \frac{\partial c}{\partial L} \tag{6.1.4}$$

式中：D_h 为机械弥散系数（L^2/T）。据 Bear 等的分析认为，机械弥散系数与孔隙流速 v 成正比关系，即

$$D_h\left(v\right) = \alpha v \tag{6.1.5}$$

式中：α称为弥散度（L），与土壤质地和结构有关。

显然，分子弥散和机械弥散通量的表达形式是类似的，但二者的机理完全不同。一般情况下，机械弥散与分子扩散是以不可分割的形式同时存在的，二者综合作用的结果，就形成了水动力弥散。通常称 $D=D_s+D_h$ 为水动力弥散系数。水动力弥散所引起的溶质通量 J_D 可表示为

$$J_D = -\theta D \frac{\partial c}{\partial L} = -\theta\left[D_h + D_s\right]\frac{\partial c}{\partial L} \tag{6.1.6}$$

当对流速度相当大时，机械弥散的作用远大于分子扩散作用，此时在水动力弥散中只考虑机械弥散作用即可；反之，当土壤溶液静止时，机械弥散完全不起作用，只剩分子扩散了。

对于机械弥散和分子扩散的划分完全是人为的，这两个过程是以不可分开的形式出现在溶质在多孔介质的分散过程中。机械弥散和分子扩散的共同作用称为水动力弥散。

对任一流体质点，其在多孔介质中的运动途径和运动规律是确定的，可以用流体力学的热力学方程进行描述。但是由于多孔介质结构的复杂性，试图用流体力学中描述流体质点运动的方法去分析多孔介质中的流体运动是不可能的。水动力弥散理论是在比流体质点更宏观的多孔介质中溶质运移的层次去描述质点迁移的宏观特征，水动力弥散是描述流体质点相对于平均渗透流速的分散，此平均流速是可以在宏观上观测和测量得到的。水动力弥散作用是由于我们用平均流速去描述溶质运移而不是用真实流速描述溶质运移时而引入的一种相对于平均性质的分散。

三、 与水动力弥散有关的基本参数

与水动力弥散有关的参数很多，涉及流体参数、介质参数及流动参数，在这里给出几个主要的参数。

（1） 流体密度（ρ）

流体密度（ρ）是单位体积流体的质量，一般来说它是压力 P 和温度 T 的函数。对非均质流体的密度，应从连续流体的意义上来理解，可把它看作是位置和时间的连续函数。利用空间平均方法，可以把密度的概念转换到多孔介质的宏观水平上，即

$$\overline{\rho}\left(x,t\right) = \frac{1}{V_{0f}}\int_{V_{0f}} \rho \,\mathrm{d}V_{0f} \tag{6.1.7}$$

式中：$\bar{\rho}(x,t)$为多孔介质中流体的平均密度；V_{0f}是多孔介质典型单元体中被流体所占据的部分。

对于多组分流体，可以定义任一组分 α 的密度 ρ_α 为单位体积混合溶液中所含组分 α 的质量。设 m_α 和 m 分别为典型体元中 α 组分和流体体系的瞬时质量，则 α 组分的密度为

$$\rho_\alpha = \frac{m_\alpha}{V_{0f}} \tag{6.1.8}$$

混合流体的密度为

$$\rho = \frac{m}{V_{0f}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m_\alpha}{V_{0f}} \tag{6.1.9}$$

（2） 流体黏度（*u*）

流体受到切力作用时要发生连续变形（即流动），流体阻止这一变形的性质称为黏滞性。黏滞性是处于运动状态的流体阻止其产生切变的性质的度量。对所有气体和最简单的液体来说，其性状服从如下的牛顿黏滞定律：

$$\tau = -\mu \frac{\partial v}{\partial n} \tag{6.1.10}$$

式中：τ 称为流体的切应力；μ 为流体的动力黏度；$\dfrac{\partial v}{\partial n}$ 为流体的局部法向速度梯度。

在流体力学中，将动力黏度与密度的比值 υ 称为流体的运动黏度（或分子运动黏度），即

$$\upsilon = \frac{\mu}{\rho} \tag{6.1.11}$$

（3） 溶质浓度（*C*）

对于多组分流体来说，某一组分 α 的浓度就是该组分的密度 ρ_α，习惯上用 C_α 来表示。对于只有溶质和溶剂的二元体系的流体，常用 C 表示该溶质的浓度。

在多孔介质中，溶质 r 既可存在于液相中，也可存在于固相中。若用 $C_{\alpha,r}$ 表示 α 相中含溶质 r 的浓度，根据空间平均法，α 相中溶质 r 的宏观平均浓度 $\bar{C}_{\alpha,r}$ 为

$$\bar{C}_{\alpha,r} = \frac{1}{V_{0\alpha}} \int_{V_{0\alpha}} C_{\alpha,r}\, \mathrm{d}V_{0\alpha} \tag{6.1.12}$$

式中：$V_{0\alpha}$ 是典型体元中 α 相所占据的部分。

（4） 流体的速度

对于由 N 种混合而成的多组分流体中，可以把多组分流体的速度设想为 N 种独立的连续介质的速度的叠加。若用 $\boldsymbol{u}_\alpha$ 表示组分 α 的微观速度（质点速度），则对整个流体体系，可以定义两种平均速度，即质量平均速度 $\boldsymbol{u}$ 和体积平均速度 $\boldsymbol{u}'$。

$$\boldsymbol{u} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\rho_\alpha}{\rho} \boldsymbol{u}_\alpha \tag{6.1.13}$$

$$\boldsymbol{u}' = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{V_{0\alpha}}{V_0} \boldsymbol{u}_\alpha \tag{6.1.14}$$

根据空间平均方法，可求得典型单元体上的宏观平均速度值：

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{V_{0\alpha}} \int_{V_{0\alpha}(x)} \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}V_{0\alpha} \tag{6.1.15}$$

$$\overline{\boldsymbol{u}}' = \frac{1}{V_{0\alpha}} \int_{V_{0\alpha}(x)} \boldsymbol{u}' \, \mathrm{d} V_{0\alpha} \tag{6.1.16}$$

当溶质各组分的体积随其浓度发生变化时，需使用体积平均速度 $\overline{\boldsymbol{u}}'$。一般情况下，主要使用质量平均速度 $\overline{\boldsymbol{u}}$。

在不可压缩的均质单组分流体中（即 α =1，$\rho_\alpha = \rho$ =常数）， $\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{\boldsymbol{u}'} = \boldsymbol{q}/n$；孔隙平均速度用于研究锋面和质点的运动，而达西速度用于计算通过已知断面的流量。

α 组分的质点流速 $\boldsymbol{u}_\alpha$ 相对于体系质量平均速度 $\boldsymbol{u}$ 有一个偏差 $\hat{\boldsymbol{u}}_\alpha$，称 $\hat{\boldsymbol{u}}_\alpha$ 为 α 组分质点的质量扩散速度，即

$$\hat{\boldsymbol{u}}_\alpha = \boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u} \tag{6.1.17}$$

（5） 流体的通量（*J*）

流体通过单位面积的流体质量称为质量通量，一般用流体的密度和流速的乘积来表示。α 组分的质量通量 $\boldsymbol{J}_\alpha$ 即为

$$\boldsymbol{J}_\alpha = \rho_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha \tag{6.1.18}$$

对于固定坐标系来说，它是单位时间内通过与流体方向垂直的单位面积上的 α 组分的质量。与式(6.1.12)相类似，α 组分相对于质量平均速度的质量扩散通量（亦称为机械弥散通量或对流弥散通量）为

$$\boldsymbol{J}_\alpha = \rho_\alpha \hat{\boldsymbol{u}}_\alpha = \rho_\alpha \left(\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u} \right) \tag{6.1.19}$$

显然，有 $\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{J}_\alpha = 0$，否则会破坏水流的连续性。例如，流体体系中只有 α、β 两种组分，α 表示溶质，β 表示溶剂，溶质从高浓度向低浓度扩散，溶剂也不例外，但两者浓度梯度方向相反，扩散方向也相反，则有 $\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{J}_\alpha = 0$。

（6） 比表面（*M*）

单位体积的多孔介质中所含固体颗粒的总表面积，称为该固相的比表面，用 M 表示，即

$$M = {A_s}/{V} \tag{6.1.20}$$

式中：A_s 为固体颗粒的总表面积；V 是所研究的多孔介质的体积。比表面的大小取决于孔隙率、颗粒排列、形状和粒径分布等因素，在研究与表面现象有关的问题（如过滤、吸附和离子交换等）时，比表面的大小起着重要作用。

（7） 多孔介质的弯曲率（*T*）

流体质点在多孔介质中的微观运动，实际上是沿着弯曲的通道绕过固体颗粒在其孔隙中进行，显然，局部质点速度的大小和方向都与宏观平均速度不同。设想多孔介质的孔隙通道是由若干个弯曲的管子所构成，设某根管子的某段长度为 L_0，其管轴与流体平均流动方向（x 方向）处于同一平面上，管子在 x 轴上的投影长度为 L。若用 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}}$ 表示沿管子运动的平均速度，用 $\boldsymbol{u}_x$ 表示投影到

x 方向的平均速度，由 $\frac{L_0}{\boldsymbol{u}_g}=\frac{L}{\boldsymbol{u}_x}$ 可得

$$u_x = u_g\left(\frac{L}{L_0}\right) \tag{6.1.21}$$

若该段管子两端的水头差为 Δh，据达西定律，有

$$\boldsymbol{u}_g = K\frac{\Delta h}{L_0} \tag{6.1.22}$$

将式(6.1.15)代入式(6.1.16)，得

$$\boldsymbol{u}_x = K\left(\frac{L}{L_0}\right)^2\frac{\Delta h}{L} = KT\frac{\Delta h}{L} \tag{6.1.23}$$

其中，$T=\left(\frac{L}{L_0}\right)^2$ 称为管子的弯曲率，它的大小反映了管子的弯曲程度，T 值减小，相当于增加了沿 x 方向的流动阻力。质点弯曲率的微分表达形式为：

$$T = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 \tag{6.1.24}$$

第二节　水动力弥散系数（*D*）

水动力弥散系数（D）是表征在一定流速条件下，多孔介质对某种污染物质弥散能力的参数，它综合反应了流体和介质的特性，依赖于流体速度、分子扩散和介质特性。由于水动力弥散由机械弥散和分子扩散两部分共同作用的结果，因此，水动力弥散系数 D 可表示为机械弥散系数 D' 和分子扩散系数 D''之和，即 $D=D'+D''$。和多孔介质中水的渗透系数一样，水动力弥散系数也是一个张量。

在实际多孔介质中，影响水动力弥散系数的因素很多，相互之间的关系也非常复杂，通常需借助理想模型的研究方法，将多孔介质用一个假想的、简化的模型来代替，从而将在该模型中发生的弥散现象用精确的数学方法来求解。在此基础上，对弥散系数的主要影响因素逐项加以讨论分析，再将其结果类推到实际的多孔介质中。

一、 研究水动力弥散的理论模型

理论（理想）模型可以给出弥散系数的结构，揭示弥散系数与孔隙骨架、水流参数及分子扩散系数之间的关系。具有代表性的机械弥散系数的理论模型是由 Bachmat 与 Bear（1964）及 Bear 与 Bachmat（1990）导出的相互连通的空间毛管网络模型，其形式为

$$D'_{ij} = a_{ijmn}\frac{u_m u_n}{u}f\left(P_e,\delta\right) \tag{6.2.1}$$

式中：D'_{ij} 称为机械弥散系数，为二阶对称张量； u 为地下水流速[L^2/T]；u_m、u_m 为地下水流速分量[L^2/T]；右端的函数 $f(P_e,\delta)$具有如下关系式

$$f\left(P_e,\delta\right)=\frac{P_e}{P_e+4\delta^2+2} \tag{6.2.2}$$

式中：P_e 为分子扩散的 Peclet 数；$\delta=\dfrac{\overline{l}}{\overline{R}}$，其中，$l$ 为毛管的平均长度[L]，R 为毛管的平均水力半径。显然，当 Peclet 数很大时，$f(P_e,\delta)$近似等于 1。

a_{ijmn} 为多孔介质的弥散度，是一个完全由介质的空隙性所决定的参数，包括毛管的传导系数 B，毛管的平均长度 $\overline{l}$ 和曲折率 $\overline{T}$。a_{ijmn} 是一个四阶张量，在三维空间中共有 $3^4=81$ 个分量，但对于各向同性介质，则只有 36 个非零分量，且仅涉及两个数 α_L 和 α_T，即

$$a_{ijmn}=\alpha_T\delta_{ij}\delta_{mn}+\frac{\alpha_L-\alpha_T}{2}\left(\delta_{im}\delta_{jn}+\delta_{in}\delta_{jm}\right) \tag{6.2.3}$$

式中：α_L 和 α_T 分别为各向同性介质的纵向和横向弥散度[L]；δ_{ij} 为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \tag{6.2.4}$$

将式（6.2.3）代入式（6.2.1）中，并取 $f(P_e,\delta)\approx 1$，得到

$$D'_{ij}=\alpha_T u\delta_{ij}+\left(\alpha_L-\alpha_T\right)\frac{u_i u_j}{u} \qquad (i,j=1,2,3) \tag{6.2.5}$$

对于直角坐标系，依据式(6.2.5)，可得到三维和二维地下水渗流中机械弥散系数张量的分量的表达形式。如对二维渗流中的弥散问题，i, j 表示 x,y 两个方向，由式(6.2.5)可得

$$\begin{aligned}
D'_{xx}&=\alpha_L\frac{{u_x}^2}{u}+\alpha_T\frac{{u_y}^2}{u}\\
D'_{xy}&=D'_{yx}=\left(\alpha_L-\alpha_T\right)\frac{u_x u_y}{u}\\
D'_{yy}&=\alpha_T\frac{{u_x}^2}{u}+\alpha_L\frac{{u_y}^2}{u}
\end{aligned} \tag{6.2.6}$$

若直角坐标系中一个坐标轴（如 x 轴）与平均流动方向一致，则称该轴（x 轴）为弥散主轴弥散主轴的主方向即为弥散主方向。在以 x 轴为弥散主轴的情况下，即 $u_x=u$，$u_y=0$，有

$$D'_{xx}=\alpha_L u\text{；}\quad D'_{xy}=D'_{yx}=0\text{；}\quad D'_{yy}=\alpha_T u \tag{6.2.7}$$

一般情况下，对于渗流场中不同点的平均孔隙流速的方向是不同的，弥散主轴也会随孔隙流速方向的变化而变化。只有当地下水总体呈均匀流动（即满足处处有 u_x=常数，u_y=0）时，上式关系才对整个流场有效。

多孔介质分子扩散系数 D'' 也是二阶对称张量，其分量为

$$D''_{ij} = D_m T''_{ij} \tag{6.2.8}$$

式中：D_m是纯溶液中的分子扩散系数；T''_{ij}为多孔介质曲折率张量的分量。

显然 $T''_{ij}<1$，所以 $D''_{ij}<D_m$，说明多孔介质中溶液的分子扩散系数小于纯溶液中的分子扩散系数。这是因为多孔介质中通道曲折，减少了分子扩散的有效性。

二、 分子扩散系数和机械弥散系数

对流是由于地下水的流动而产生的溶质运移现象。常以通量表示溶质运移量的多少，即单位时间通过与弥散方向垂直的单位面积的溶质质量[M/（L^2·T）]称为溶质通量（对流通量）。对流通量用 J_C表示，则

$$J_C = qC \tag{6.2.9}$$

式中，q 为水流通量；C 为溶液浓度。

分子扩散是由于液体中浓度梯度的存在而引起的一种物质运移现象，它与流速无关。浓度梯度使高浓度处的物质向低浓度处运移，以求浓度达到均一。在自由溶液中，分子扩散通量服从费克（Fick）定律，即

$$J_a = -D_d \frac{\partial C}{\partial L} \tag{6.2.10}$$

式中：D_d为自由溶液中的分子扩散系数[L^2/T]；C 为溶液浓度（M/L^3）；L 为扩散方向的距离（L）。

由于多孔介质的存在，使得介质中分子扩散系数 D''小于溶液中的分子扩散系数 D_d，其关系为 $D''=TD_d$，其中 T 是反映介质特性的参数，称为多孔介质的弯曲率。

机械弥散是由于流体的流动和在其中发生流动的孔隙系统的存在而产生的一种溶质运移现象，也称为对流扩散。机械弥散使溶质逐渐散布到越来越大的流动区域。由于多孔介质中微观通道系统的复杂性和流体的特点，导致流体在孔隙中微观流速的分布在大小和方向上都不一样，溶质质点也会按照孔隙中的流速分布迂回前进，在流动过程中逐渐散布扩展，占据多孔介质中越来越大的范围，如图 6.2 所示。这是微观尺度上的不均匀性造成的机械弥散。

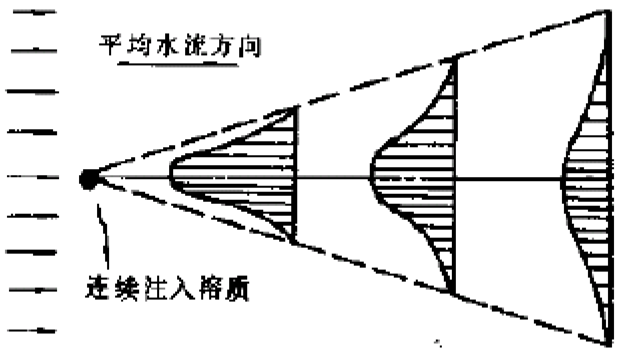


图 6.2 水动力弥散现象

此外，由于流动区域不同，不同区域的渗透性可能不一样，形成了宏观尺度上的不均匀性，这是造成机械弥散的另一个原因。

实验证明，机械弥散也服从费克定律。若以 J_m 、D' 分别表示机械弥散通量和机械弥散系数，则有

$$J_m = -D' \frac{\partial C}{\partial L} \tag{6.2.11}$$

Bear（1969）分析认为机械弥散系数 D' 与孔隙平均流速 v 成正比，常可近似表示为

$$D' = \alpha \cdot v \tag{6.2.12}$$

式中：α 称为弥散度（L）。

在多孔介质水流中，机械弥散与分子扩散的作用是难以分开的，二者综合作用的结果就形成了水动力弥散。当流速较大时，机械弥散在水动力弥散中起主要作用；当流速较小时，分子扩散作用就变得更为明显。可见，影响水动力弥散状况的基本参数应包括反应流体特征的流体密度 ρ、反应介质特性的体系质点流速（可用质量平均速度 $\bar{u}$ 表示）及流体的质量通量。

水动力弥散作用使得溶质不仅沿水平流动方向散布，也会沿垂直于平均流动方向扩展，前者称为纵向弥散，后者称为横向弥散。含水层的非均质性（包括局部微观的非均质和宏观的非均质）会对水动力弥散产生影响，局部微观非均质还可能是引起野外实测弥散系数与室内弥散系数相差若干个数量级的主要原因。

三、 水动力弥散的尺度效应

多孔介质水动力弥散尺度效应是指空隙介质中弥散度随着溶质运移距离的增加而增大的现象。大量的室内和野外实验表明，由于研究区域的尺度不同，所得到的弥散系数差别悬殊，相差可达 3~5 个数量级；即使在同一含水层，溶质运移距离越大，测出的弥散度也越大。充分说明了弥散度与研究区域的大小有关，即在室内或在小尺度范围内获得的弥散度不能应用于野外大区域的溶质运移问题，这就使得将水动力弥散理论用于区域地下水污染预测等环境问题的研究遇到了新的难题——尺度效应。

尺度效应问题的提出进一步推动了对于弥散模型和弥散机理的研究，其研究方法包括以下几种：①确定性方法，从微观尺度研究溶质在空隙介质中运移的物理机制，重新检验对流－弥散方程的可行性，尤其是空隙介质中引入 Fick 扩散定律的可靠性；②随机方法，根据含水层非均质的特性，按其物理性质、水力性质和溶质运移性质所遵循的随机模型分布，建立溶质运移随机方程和水动力弥散系数的表达式；③通过室内与野外水动力弥散试验，深入研究尺度效应的影响因素；④探讨避免或减小尺度效应的方法。

（一） 弥散系数的尺度效应问题

在地下水动力弥散理论中，用弥散度或弥散系数来表示空隙介质的弥散特征。根据 Bear（1972）的定义，弥散度是反映空隙介质骨架结构的特征长度，反映了对弥散作用起决定作用的空隙介质性质，即孔隙度、颗粒形状、大小、颗粒的不均匀系数、空隙连通性与弯曲率等。大量室内外弥散试验表明，弥散度主要受空隙介质中颗粒不均匀系数与颗粒大小的影响，水动力弥散主要受空隙介质空间变化特征的影响。

显然，在微观水平上无法反映介质特性的空间变化，要想解决实际的地下水溶质运移问题，必须从微观水平上升到宏观水平。一般的作法是，将单组分的对流扩散方程的各未知量在典型单元体上取空间平均。典型单元体是能够反映空隙介质结构特征在宏观上“均匀”的最小单位。

多孔介质的非均质性都是普遍存在的，从微观尺度到宏观尺度，通常将多孔介质水动力弥散现象划分为 4 种尺度：空隙、实验室、单含水层与区域含水层。空隙尺度中的非均质主要表现为空隙大小的变化；实验室尺度中的非均质，是细砂到粗砂大小的变化及更细粒的充填分布；在单含水层尺度下则表现为细砂—粗砂沉积韵律的变化；而在区域尺度下，则表现为不同成因所形成含水层的分布与变化。

那么，利用典型单元体的概念能否描述水动力弥散中的尺度效应呢？对于空隙尺度的多孔介质，如果存在着一个包含一定数量的颗粒及空隙而能得到一个稳定的孔隙度值，这种介质是均匀的，可以得出相应的渗透系数与弥散度值；但随着研究范围的扩大，从微观尺度到宏观尺度是连续变化的，相应的典型单元体也会增大，不能得到一定尺度下稳定的弥散度和渗透系数“均质”；另外，典型单元体没有定量信息，无法具体测量其大小，所以无法定量描述尺度效应。

（二） 尺度效应的分形特征

宏观弥散与微观弥散的机制是相同的，即多孔介质的非均匀性进而造成流速的不均匀为产生水动力弥散的主要因素。弥散度反映了多孔介质骨架结构的特征长度，它随着研究尺度的增加而增大。不同尺度下多孔介质结构具有自相似性，则尺度效应也具有自相似性。于是，可以用分形理论来定量描述多孔介质水动力弥散的尺度效应。

分形维数是描述分形的主要参数，也简称为分维。在实际工作中，常根据测度关系确定维数。一般，直线或曲线是 1 维测度，平面或球面是 2 维测度，具有长、宽、高的形体是 3 维测度。若把立方体一边的长度扩大到 2 倍，那么 2 维测度的表面积即为 2^2 倍，3 维测度的体积即为 2^3 倍。因此，若把基准单位长度扩大到 2 倍，并假定它能成为具有 2^D 倍的量，这个量就称之为 D 维数的量。若把具有 D 维测度的量假定为 X，长度为 L，则有如下关系：

$$L \propto X^{\frac{1}{D}} \tag{6.31}$$

由于多孔介质中水动力弥散尺度效应的具体表现是弥散度随溶质运移距离的增加而增大，可将溶质运移距离 L 视为度量弥散度的基准尺度，在双对数坐标纸上点绘弥散度与基准尺度的关系曲线，若为直线则从另一角度说明尺度效应具有分形特征，直线的斜率即为尺度效应的分维。

第三节 溶质运移的对流－弥散方程

多孔介质中的溶液运动体系为一多相分散体系，其中包含有固体颗粒、液体和气体，对于饱和水流运动来说，一般假设气体不存在。含有溶质的水体在多孔介质中的运动空间即为孔隙空间，由于多孔介质结构的复杂性和分布的随机性，其孔隙的分布是杂乱无章的。而我们一般所观测到的多孔介质中的水流现象，都是流体在孔隙中微观运动的宏观表现。因而我们需要研究其中各宏观物理量的关系，和其所遵从的基本规律，这就是水动力弥散方程。

一、 水动力弥散方程

水动力弥散方程常称为对流-弥散方程。这里以饱和渗流为例导出在只有一种溶质和溶剂的二

元体系条件下的对流-弥散方程。

为导出宏观水平上的水动力弥散方程，沿用在渗流中采用的典型单元体的概念，即所涉及到的变量和参数在每个空间点处的值都是在典型单元体平均意义上的值。

在所考虑的均质各向同性渗流区域中任取一单元体，如图 6.3。设 q_x、q_y、q_z 分别为达西流速在 x、y、z 方向的分量，n 为孔隙度。在 dt 时段内，引起单元体中溶质质量变化的主要有对流和水动力弥散两种作用（忽略吸附等的影响）。

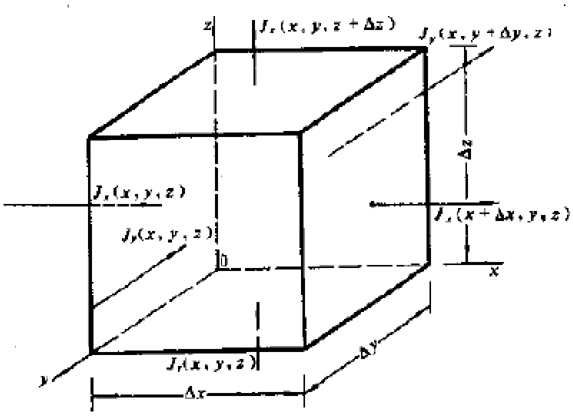


图 6.3 单元体示意图

1. 由对流作用引起的溶质质量变化

设 M_{1x}、M_{1y}、M_{1z} 分别表示在 dt 时段内沿 x、y、z 方向流入单元体的溶质质量的增量，有

$$
\begin{aligned}
M_{1x} &= -\frac{\partial\left(Cq_x\right)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t \\
M_{1y} &= -\frac{\partial\left(Cq_y\right)}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}t \\
M_{1z} &= -\frac{\partial\left(Cq_z\right)}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{6.3.1}
$$

2. 由对流弥散作用引起的溶质质量变化

设 M_{2x}、M_{2y}、M_{2z} 分别表示在 dt 时段内沿 x、y、z 方向由于水动力弥散作用而产生的单元体内溶质质量增量，即

$$
\begin{aligned}
M_{2x} &= -n\frac{\partial J_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t \\
M_{2y} &= -n\frac{\partial J_y}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}t \\
M_{2z} &= -n\frac{\partial J_z}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{6.3.2}
$$

根据质量守恒定律，单元体内由对流和弥散作用在 dt 时段内引起的溶质质量变化的代数和，应等于该单元体内溶质质量的变化量：$n\dfrac{\partial C}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$，则有

$$n\frac{\partial C}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t = M_{1x} + M_{2x} + M_{1y} + M_{2y} + M_{1z} + M_{2z}$$

将式(6.3.1)和(6.3.2)代入该式，两边同除以 $n\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$，得

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}\right) - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{q_x}{n}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(C\frac{q_y}{n}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(C\frac{q_z}{n}\right)\right] \tag{6.3.3}$$

将费克定律 $J_i = -D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}$ 和孔隙流速 $v_x = \frac{q_x}{n}$，$v_y = \frac{q_y}{n}$，$v_z = \frac{q_z}{n}$ 代入式(6.3.3)后，可得到水动力弥散方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t} = &\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xy}\frac{\partial C}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xz}\frac{\partial C}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{yy}\frac{\partial C}{\partial y}\right)\\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{yx}\frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{yz}\frac{\partial C}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_{zz}\frac{\partial C}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_{zx}\frac{\partial C}{\partial x}\right)\\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left(D_{zy}\frac{\partial C}{\partial y}\right) - \left[\frac{\partial(Cv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(Cv_y)}{\partial y} + \frac{\partial(Cv_z)}{\partial z}\right]\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

上式可简写为

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial(Cv_i)}{\partial x_i} \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{6.3.5}$$

也可简写为以下两种形式：

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \mathrm{div}(D\,\mathrm{grad}\,C) - \mathrm{div}(Cv) \tag{6.3.6}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla(D\nabla C) - \nabla(Cv) \tag{6.3.7}$$

二、 水动力弥散方程的扩充

（一） 有源汇项时的弥散方程

当渗流区内有工作井或溶质有放射性衰减时，根据质量守恒原理，水动力弥散方程的基本形式不变，仅将相应的源汇项 I 加入即可，此时水动力弥散方程形式为

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial(Cv_i)}{\partial x_i} + I \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{6.3.8}$$

针对不同情况，I 有具体的表达式，常见的有以下两种情况：

（1）放射性衰减

当所研究的示踪剂在多孔介质的运移过程中发生放射性衰减时，由于这一衰减造成示踪剂浓度的变化率 I 与其质量成正比，有

$$I=\frac{\partial C}{\partial t}=-\lambda C \tag{6.3.9}$$

式中：λ 是示踪剂衰减常数，为示踪剂平均寿命的倒数（T^{-1}）；此时 I 表示单位时间单位体积的多孔介质中液相溶质由于放射性衰减而减少的示踪剂的质量。

（2）均匀补给或开采项

如果向含水层注入含有溶质浓度为 C_0 的水，设单位时间对单位体积含水层的注水量为 $W(T^{-1})$，则溶质的注入率 I 为

$$I=\frac{W}{n}C_0 \tag{6.3.10}$$

式中：n 是多孔介质的孔隙率。

开采时，设单位时间从单位体积含水层中开采的量为 $W(T^{-1})$，C 为开采区的溶质浓度（即方程中的待求浓度 $C(x, y, z, t)$），则由开采引起的溶质的减少率 I 为

$$I=-\frac{W}{n}C \tag{6.3.11}$$

若计算区内有越流补给或其他入渗补给时，只要能根据补给强度求得单位时间单位含水层体积内越流或入渗补给水量，即可根据补给水中溶质浓度计算 I，然后加入水动力弥散方程即可。

（二） 有吸附和解吸时的弥散方程

吸附是溶液中以离子形式存在的溶质从液相中通过离子交换转移到固相表面，从而降低了溶质浓度的过程。解吸则是相反的过程，即固相中含有的溶质离子从固相表面进入液相，从而增加了溶质浓度。可见，吸附和解吸作用的结果也应该综合到源汇项中去。

为了建立吸附和解吸的表达式，需同时考虑液相与固相中溶质质量守恒。设 F 表示固相中的溶质浓度，即单位体积的固相所含溶质的质量。令 $f(C, F)$表示在单位时间单位体积的多孔介质中，由固相进入液相的溶质质量，当 $f(C, F)$为正，则为解吸作用；反之，则为吸附作用。不论吸附还是解吸，其中的液相溶质变化率 I 为

$$I=\frac{f\left(C,F\right)}{n} \tag{6.3.12}$$

液相由于解吸（吸附）作用而增加（减少）的溶质质量，也正是固相减少（增加）的溶质质量。因此，在这种情况下，单位时间单位体积固相的溶质质量的减少为

$$\frac{\partial F}{\partial t}=-\frac{f\left(F,C\right)}{1-n} \tag{6.3.13}$$

将式(6.3.13)代入式(6.3.12)，得

$$I=-\frac{1-n}{n}\frac{\partial F}{\partial t} \tag{6.3.14}$$

将式(6.3.14)代入式(6.3.8)，可得到考虑吸附和解吸作用下的水动力弥散方程：

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial\left(Cv_i\right)}{\partial x_i}-\frac{1-n}{n}\frac{\partial F}{\partial t} \tag{6.3.15}$$

上式中，液相溶质浓度 C 与固相中溶质浓度 F 互为函数关系。在非均衡条件下，有

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\beta\left(C-\frac{F}{a_2}\right)=aC-bF \tag{6.3.16}$$

式中：β、a_2、a、b 均为常数。在均衡条件下，有：

$$F=\alpha C \qquad (\alpha =\text{常数}) \tag{6.3.17}$$

将式(6.3.17)代入式(6.3.15)，并设 $R_d=1+\frac{1-n}{n}\alpha$ ，整理后得

$$R_d\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial\left(Cv_i\right)}{\partial x_i} \tag{6.3.18}$$

或

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{D_{ij}}{R_d}\frac{\partial C}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(C\frac{v_i}{R_d}\right) \tag{6.3.19}$$

式(6.3.18)和式(6.3.19)是在均衡条件下有吸附或解吸情况下的水动力弥散方程。虽然方程中没有明显含有源汇项，但因 $R_d > 1$，由吸附或解吸所产生的后果是把弥散系数和孔隙平均流速都缩小了 $1/R_d$，相当于减缓了弥散的进程，故 R_d 称为延迟因子。

当同时存在抽水、注水、放射性衰减和吸附时，将各种情况进行叠加即可。例如，向含水层注入含示踪剂浓度为 C_0 的水，示踪剂又发生放射性衰变，而吸附服从线性均衡等温关系，此时水动力弥散方程为

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{D_{ij}}{R_d}\frac{\partial C}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(C\frac{v_i}{R_d}\right)-\lambda C-\frac{W}{n}\left(C-C_0\right) \tag{6.3.20}$$

（三） 运动坐标系中的水动力弥散方程

若引进运动坐标系：

$$x_i'=x_i-v_it \qquad (x_i=x,y,z)$$
$$v'=x'/t'=0 \qquad (t'=t)$$

即相对于运动坐标系而言，流体并没有运动，因此不考虑源汇项的水动力弥散方程的形式变为

$$\frac{\partial C}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial x_i'}\left(D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j'}\right) \tag{6.3.21}$$

三、 非饱和带中的水动力弥散方程

（一） 非饱和带中的水动力弥散方程

与饱和带中溶质弥散类似，非饱和带中溶质弥散也近似遵循费克定律。所不同的是，非饱和带的含水率θ 是变化的。当仅考虑对流、分子扩散、机械弥散的作用时，溶质的总通量J为对流通量J_C和水动力弥散通量J_D之和，由式(6.1.1)和式(6.1.6)，在水平一维情况下，有

$$J = J_D + J_C = -\theta D\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} + v\theta C \tag{6.3.22}$$

根据质量守恒原理，土壤单元体内溶质的质量变化率应等于流入和流出该单元体溶质通量之差，由此可导出一维溶质运移的对流-弥散方程

$$\frac{\partial(\theta C)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\theta D\frac{\partial C}{\partial x}\right] - \frac{\partial(v\theta C)}{\partial x} \tag{6.3.23}$$

推广到三维情况，非饱和土壤的对流-弥散方程为

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\theta C)}{\partial t} = &\frac{\partial}{\partial x}\left[\theta D_{xx}\frac{\partial C}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\theta D_{xy}\frac{\partial C}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\theta D_{xz}\frac{\partial C}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\theta D_{yx}\frac{\partial C}{\partial x}\right]\\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\theta D_{yy}\frac{\partial C}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\theta D_{yz}\frac{\partial C}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\theta D_{zx}\frac{\partial C}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\theta D_{zy}\frac{\partial C}{\partial y}\right]\\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\theta D_{zz}\frac{\partial C}{\partial z}\right] - \frac{\partial(\theta C v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\theta C v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\theta C v_z)}{\partial z}\end{aligned} \tag{6.3.24}$$

取 $x_1 = x$，$x_2 = y$，$x_3 = z$，式(6.3.24)可简化为

$$\frac{\partial(\theta C)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\theta D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}\right] - \frac{\partial(\theta C v_i)}{\partial x_i} \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{6.3.25}$$

或

$$\frac{\partial(\theta C)}{\partial t} = \mathrm{div}(\theta D\,\mathrm{grad}\,C) - \mathrm{div}(\theta C v) \tag{6.3.26}$$

当土壤处于饱和状态时，含水率θ 取饱和含水率θ_s（或孔隙率 n），即$\theta = \theta_s$，式(6.3.23)~(6.3.26)成为饱和带中水动力弥散方程，因此，上述形式可作为饱和－非饱和带中水动力弥散方程的统一形式。

（二） 方程的扩充

与饱和带一样，在非饱和土壤环境中，除了溶质运移的水动力弥散机理以外，还会由于某些化学和生物等作用产生一定的溶质（如有机质的消化作用所产生的硝酸盐离子），也会造成某些溶质从土壤中消失（如硝酸盐被植物所吸收）。考虑上述因素的影响，则需在基本方程(6.3.23)～(6.3.26)中加上源汇项 Q_e，定义 Q_e 为单位时间内单位体积土壤中所生成或消失的溶质质量。加入源汇项后，方程(6.3.25)成为

$$\frac{\partial(\theta C)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\theta D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}\right]-\frac{\partial(\theta C v_i)}{\partial x_i}+Q_e \qquad (i,j=1,2,3) \tag{6.3.27}$$

吸附和解吸是土壤中液相与固相表面以离子形式存在的溶质通过离子交换进行转换的过程，溶质的沉淀和溶解也与之类似，都会导致溶质数量的变化。但这种情况下，转化过程中没有溶质的产生和消失，只是单元体内部液相以外的溶质储存量的变化。若以σ_e表示单位体积土壤中液相以外的溶质质量的储存量，其变化率为$\frac{\partial \sigma_e}{\partial t}$，于是，在方程(6.3.27)的基础上，加入这部分储存量的变化，方程成为

$$\frac{\partial(\theta C+\sigma_e)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\theta D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}\right]-\frac{\partial(\theta C v_i)}{\partial x_i}+Q_e \qquad (i,j=1,2,3) \tag{6.3.28}$$

（三） 考虑不动水体作用时的水动力弥散方程

实验证明，由于土壤中存在死端孔隙，可形成一定的不动水体，这部分水体尽管不易流动，但却与可动水体之间依赖扩散作用发生质量交换，从而参与了非饱和带溶质运移过程，在描述非饱和带溶质运移的数学模型中应包括这种溶质交换机理。

由质量守恒原理，考虑到不动水体的作用，多孔介质中的溶质运移方程可以表示为：

$$\frac{\partial(\theta_m C+\theta_{im}S)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\theta_m D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}\right]-\frac{\partial(\theta_m C v_i)}{\partial x_i} \qquad (i,j=1,2,3) \tag{6.3.29}$$

式中：θ_m为可动水体的含水量；θ_{im}为不动水体的含水量； $\theta_m+\theta_{im}=\theta$；$S$为不动水体的浓度。

对于饱和或非饱和水流运动问题，可动水体和不动水体之间的质量交换速率与它们之间的浓度差成正比，即：

$$\frac{\partial \theta_{im}S}{\partial t}=\alpha(C-S) \tag{6.3.30}$$

式中：α 称为质量交换系数（T^{-1}）。

土壤中溶质运移问题是非常复杂的过程，难以解析求解，一般通过数值方法来求解。

四、 水动力弥散方程的定解条件

为了求得水动力弥散的偏微分方程的解 $C(x, y, z, t)$，必须给出特定的初始条件和边界条件。为简单起见，以方程(6.3.4)为例，说明主要的初始及边界条件。

初始条件：在计算区域范围内给出浓度的初始分布

$$C(x,y,z,t)\big|_{t=0}=C_0(x,y,z) \tag{6.3.31}$$

式中，t=0 是任意给定的初始时刻；C_0是位置的已知函数。

设整个渗流区内初始浓度 $C = 0$，在 $t = t_0$时刻，位置为 $x = x_0$、$y = y_0$、$z = z_0$的一点处有一瞬

时（脉冲）注入，注入的示踪剂总质量为 M，其初始条件可表示为

$$C\left(x,y,z,t_0\right)=\left(M/n\right)\delta\left(x-x_0\right)\delta\left(y-y_0\right)\delta\left(z-z_0\right) \tag{6.3.32}$$

其中，δ 是 Dirac-δ 函数，n 是多孔介质孔隙率。

边界条件：相对于计算区域边界而提出的边界条件，取决于这些边界的外侧区域中出现的介质和流体的类型。所提出的边界条件应遵循的原则是，在边界曲面的任何一点处，溶质的质量通量沿边界法线方向 $\boldsymbol{n_i}$ 的分量，在稳定的边界两侧必须相等。常见的边界条件有以下三种：

第一类边界，边界上的浓度 C 是已知函数 $C_1(x, y, z, t)$，即

$$\begin{aligned} C\left(x,y,z,t\right)\Big|_{\Gamma_1} &= C_1\left(x,y,z,t\right) \\ (x,y,z)\in\Gamma_1 &\quad t>0 \end{aligned} \tag{6.3.33}$$

第二类边界，边界上的弥散通量是已知函数 $q_2(x, y, z, t)$，即

$$D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}\boldsymbol{n_i}\Bigg|_{\Gamma_2}=-q_2\left(x,y,z,t\right) \tag{6.3.34}$$

第三类边界，边界上的溶质通量是已知函数 $q_3(x, y, z, t)$，即

$$\left(Cv_i-D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}\right)\boldsymbol{n_i}\Bigg|_{\Gamma_3}=q_3\left(x,y,z,t\right) \tag{6.3.35}$$

五、 水质模型

如前所述，水动力弥散是溶质在地下水流系统中，由于对流、机械弥散和分子扩散而产生的一种物质运移现象。要解决一个实际的溶质运移问题，必须同时建立水流、水动力弥散和流体性状的方程，即建立相应的水质模型。根据要解决的实际弥散问题的范围和精度要求，可建立水动力弥散型和对流型两种水质模型。

（一） 水动力弥散型水质模型

在计算范围较小，精度要求较高，不容许忽略过渡带的情况下，应建立水动力弥散型水质模型。可分为均质和非均质流体两种情况。

（1）非均质流体

对于非均质流体（即ρ、μ非常数），溶质浓度的变化将影响流体的密度ρ和黏度μ，而ρ和μ的变化反过来又会引起流场状态的改变，即浓度分布与流速分布既相互影响又相互依赖，二者都是未知函数。因此，对一个实际的地下水质问题常需联立求解下列方程组。

三个运动方程（达西定律）：

$$v_i=-\frac{k_{ij}}{n\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x_j}+\rho g\frac{\partial z}{\partial x_j}\right) \qquad i,j=1,2,3 \tag{6.3.36}$$

二个状态方程：

$$\rho=\rho(C,p),\qquad \mu=\mu(C,p) \tag{6.3.37}$$

对低浓度不可压缩流体，可用它的一阶近似式：

$$\rho=\rho_0+\alpha(C-C_0),\qquad \mu=\mu_0+\beta(C-C_0) \tag{6.3.38}$$

式中：C_0为一参考浓度；ρ_0、μ_0是浓度为C_0时的密度和黏度；α、β是由试验确定的常数。

一个水动力弥散方程（对流-弥散方程）：

对饱和流 $$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial(Cv_i)}{\partial x_i}\qquad (i,j=1,2,3)$$

对非饱和流 $$\frac{\partial(\theta C)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{ij}\frac{\partial(\theta C)}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial(\theta Cv_i)}{\partial x_i}\qquad (i,j=1,2,3)$$

一个质量守恒方程（连续性方程）：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i}=0 \tag{6.3.39}$$

上列式中p表示水的压力；其余符号意义同前。

以上共有7个方程，正好可以求解7个未知数（$C, p, \rho, \mu, v_x, v_y, v_z$）。在适应的初始和边界条件下，通过联立求解即可唯一地确定出各个未知量。这7个方程连同相应的初始和边界条件，就构成了非均质流体水质的水动力弥散型数学模型。

（2）均质流体

均质流体的ρ和μ为常数，浓度分布不会影响速度的分布，所以弥散方程、连续性方程和运动方程均与状态方程无关，整个方程组的求解可分为两个独立的问题。第一个问题，先由连续性方程和运动方程解出速度分布，为渗流计算问题；第二个问题，把速度分布代入弥散方程独立求解，即可求得计算区浓度分布。可见对均质流体来说，溶质运移的计算量可大大减少。而大多数实际的溶质运移计算问题，浓度都较小，故可近似视为这类情况。但对海水入侵问题则不能视为均质流体，因为海水含盐浓度很高，而浓度变化对ρ、μ有明显的影响。

在均质各向同性多孔介质中的均质流体，可根据渗流区和溶质弥散的特征，分为以下几种水质模型：

1）饱和渗流区弥散问题的水质模型，包括：

地下水渗流微分方程：

承压水： $$\mu_e\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(KM\frac{\partial h}{\partial x_i}\right) \tag{6.3.40}$$

潜水： $$\mu\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(Kh\frac{\partial h}{\partial x_i}\right) \tag{6.3.41}$$

运动方程（达西定律）：
$$v_i=-\frac{K}{n}\frac{\partial h}{\partial x_i}\qquad(i=1,2,3)\tag{6.3.42}$$

水动力弥散方程：式(6.3.5)。

上述各式中，μ_e 是承压含水层的弹性释水系数；μ 是潜水含水层的给水度；K 是渗透系数（或水力传导度）；n 是孔隙率；水头 $h=z+p/\gamma$。

2）非饱和渗流区弥散问题的水质模型，包括：

非饱和土壤水渗流微分方程：

$$C(h)\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[K(h)\frac{\partial h}{\partial x_i}\right]+\frac{\partial K(h)}{\partial z}\qquad(i=1,2,3)\tag{5.2.23}$$

运动方程：
$$v_i=-\frac{K(h)}{n}\frac{\partial h}{\partial x_i}\qquad(i=1,2,3)\tag{6.3.42}$$

水动力弥散方程：式(6.3.25)。

3）饱和-非饱和渗流区弥散问题的水质模型

无论是饱和带还是非饱和带，水的运动都遵循质量守恒原理，而且实验也证明了达西定律可近似用于非饱和带，从而可建立统一的饱和-非饱和水流微分方程。由于潜水面上的压力 p 等于大气压，潜水面以上质点的水势 p 小于大气压，潜水面以下质点的水势 p 大于大气压。设大气压为零，则位于潜水面处、潜水面以上和潜水面以下水的压力分别为 $p=0$、$p<0$、$p>0$ 三种情况。

饱和-非饱和渗流区弥散问题的水质模型包括以下方程：

地下水渗流微分方程：

$$\left[\mu_e^*\frac{\theta}{n}+C(h)\right]\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[K(h)\frac{\partial h}{\partial x_i}\right]+\frac{\partial K(h)}{\partial z}\qquad(i=1,2,3)\tag{6.3.43}$$

运动方程为式(6.3.42)；

水动力弥散方程为式(6.3.25)。

上式中各符号意义同前。θ 是土壤体积含水量，表示单位体积含水层中水所占体积的百分数，$\theta\le n$，只有当土壤达到饱和时，才有 $\theta=n$，此时非饱和带弥散方程就转变为饱和带弥散方程。在饱和条件下，式(6.3.43)中的 $C(h)$为零，该式成为饱和水流方程式。当 $\theta\ne n$ 时，等号左侧第一项较小，可忽略不计，该式即为非饱和水流方程。

若有吸附、衰减或抽、注水等情况，在水动力弥散方程中加入相应的源汇项即可。

在用水质模型解决实际地下水质问题时，必须对所选水质模型进行检验校正后才能用于实际计算。验证的方法是，首先确定出模型中各种参数和边界条件的估计值，代入选定的水质模型，计算模拟已有的污染历史或试验过程，检查模拟计算结果与现场观测资料或试验资料的一致性。若不一致，需用试估—校正或其他优化方法对参数进行修正，直到拟合良好为止。此时才得到一个可以实际应用的水质模型。为保证这一模型的可靠性，最好根据该模型的预测结果再进行一些现场的验证工作。

（二） 纯对流型水质模型

水动力弥散作用体现于污染水与未污染水之间存在的过渡带上。如果过渡带的宽度与所研究范围相比甚为狭窄时，就可以忽略弥散作用，采用纯对流型水质模型，可以使计算工作大为简化。

纯对流模型可分为两种：一种是只用水流方程；另一种是将水流方程与水质方程相耦合，但在水质方程中不考虑弥散作用。

（1）用水流方程预测溶质运移

当两种可溶混（污染和未污染）流体之间的过渡带宽度可忽略时，可将这个过渡带近似视为一个突变的锋面，它随着污染的发展不断移动，污染物所到之处就是两种流体的分界面。这种驱替作用类似活塞的运动，因此又称为活塞型模型。这类问题的求解归结为如何确定运动锋面的位置，可用数值方法求解。

设已知时段初锋面的位置，可沿锋面取若干点，使这些点的数量足以多，以能充分刻画出锋面的位置和形状；用水流方程和达西定律计算出各点在该时刻的速度，继而计算各点在时段末所走的距离，即可求得它们在该时刻的位置；如此逐时段计算，即可求得不同时刻锋面的位置。

一般来说，对于流速大，弥散系数很小的弥散问题，可以采用这种纯对流型模型。但对一个实际问题，能否采用这种纯对流模型，取决于所研究问题的规模及要求的精度。

（2）水流方程与水质方程的耦合方法

该方法是以水量均衡与质量均衡为基础，由水量方程求得任一时段水量的变化量分布，代入质量均衡方程中得出该时段浓度变化的分布。

对平面二维污染问题，可用有限差分法分别建立任一差分单元 i 的水量均衡方程（即水流有限差分方程）和溶质质量均衡方程（即溶质有限差分方程）。取任一时间段Δt，先由水流差分方程求出单元 i 与相邻任意单元 j 的交换流量 Q_{ij}，和单元 i 所含水量 V_i，再由质量均衡方程求得单元 i 的浓度 C_i。

第四节 水动力弥散方程的解析解

在理想条件下，解析解能够精确地反映函数的分布变化规律。但是除少数特别简单的模型外，实际常遇到的溶质运移问题难以得到解析解。尽管如此，研究溶质运移基本方程的解析解法仍然是非常必要的。因为各种数值方法要用解析解来进行验证和比较，要利用解析解或配合标准曲线来确定弥散系数，还要根据解析解的适用条件来设计室内或野外试验等等。

目前溶质运移方程的解析解，一般都是针对均质各向同性含水层中的一维或径向流水动力弥散问题，在地下水为稳定流，弥散系数为常数的条件下求得的。现仅就一维流动的溶质运移问题解析解的求解方法作些简要介绍。

一、 有放射性衰减时水动力弥散方程的解析解

设有一半无限的多孔介质一维溶质运移问题，原始状态溶质浓度为 0，起始时刻，边界处示踪剂浓度瞬时变为 C_0 并维持不变，溶质具有衰变作用。水流运动为一维均匀流，孔隙流速为常量 v，溶质运移的定结问题可以表示为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v\frac{\partial C}{\partial x} - \lambda C \\
&C(x,0) = 0 \\
&C(0,t) = C_0, \quad t > 0 \\
&C(\infty,t) = 0, \quad t > 0
\end{aligned} \tag{6.4.1}
$$

对于式（6.4.1）应用拉氏变换，并应用式（6.4.1）中的起始条件，得到

$$
\begin{aligned}
&D\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x^2} - v\frac{\partial \overline{C}}{\partial x} - (\lambda + p)\overline{C} = 0 \\
&\overline{C}(0,t) = C_0 / p, \quad t > 0 \\
&\overline{C}(\infty,t) = 0, \quad t > 0
\end{aligned} \tag{6.4.2}
$$

式（6.4.2）为线性齐次二阶常微分方程，其通解为：

$$
\overline{C}(x,p) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \tag{6.4.3}
$$

式中：r_1 和 r_2 是特征方程 $Dr^2 - vr - (\lambda + p) = 0$ 的两个根：

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{v + \sqrt{v^2 + 4D(\lambda + p)}}{2D} \\
r_1 &= \frac{v - \sqrt{v^2 + 4D(\lambda + p)}}{2D}
\end{aligned} \tag{6.4.4}
$$

将式（6.4.4）代入式（6.4.3）得到：

$$
\overline{C}(x,p) = A\exp\left(\frac{v + \sqrt{v^2 + 4D(\lambda + p)}}{2D}x\right) + B\exp\left(\frac{v - \sqrt{v^2 + 4D(\lambda + p)}}{2D}x\right) \tag{6.4.5}
$$

将式（6.4.2）中的边界条件代入上式，有 $A=0$，$B=C_0/P$，可以得到式（6.4.4）的通解

$$
\overline{C}(x,p) = \frac{C_0}{P}\exp\left[\left(\frac{v}{2D} - \sqrt{\frac{v^2}{4D^2} + \frac{\lambda + p}{D}}\right)x\right] \tag{6.4.6}
$$

查拉氏逆变换表得到：

$$
\begin{aligned}
C(x,t) = \frac{C_0}{2}\exp\left(\frac{vx}{2D}\right)\Bigg\{&\exp\left[\left(-x\sqrt{\frac{v^2}{4D^2} + \frac{\lambda}{D}}\right)\right]\operatorname{erfc}\left[\left(\frac{x - t\sqrt{v^2 + 4D\lambda}}{2\sqrt{Dt}}\right)\right]\Bigg\} + \\
&+ \mathrm{xp}\left[\left(x\sqrt{\frac{v^2}{4D^2} + \frac{\lambda}{D}}\right)\right]\operatorname{erfc}\left[\left(\frac{x + t\sqrt{v^2 + 4D\lambda}}{2\sqrt{Dt}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{6.4.7}
$$

式（6.4.7）即为有放射性衰减时对流-弥散方程的解析解。

二、 保守性溶质水动力弥散问题的解析解

半无限多孔介质中保守性溶质的一维运移问题，原始状态溶质浓度为 0，起始时刻边界处示踪剂浓度瞬时变为 C_0 并维持不变，水流运动为一维均匀流，孔隙流速为常量 v，溶质运移定解问题为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial C}{\partial t}=D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}-v\frac{\partial C}{\partial x}\\&C(x,0)=0\\&C(0,t)=C_0,\qquad t>0\\&C(\infty,t)=0,\qquad t>0\end{aligned}\tag{6.4.8}$$

比较式（6.4.8）和式（6.4.1），可以得到式（6.4.8）的解为

$$C(x,t)=\frac{C_0}{2}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x-vt}{2\sqrt{Dt}}\right)+\exp\left(\frac{vx}{D}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x+vt}{2\sqrt{Dt}}\right)\right]\tag{6.4.9}$$

式中：$\operatorname{erfc(z)}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty e^{-x^2}dx$ 为余误差函数，当 D/vx 足够小时，式（4.6.9）括号中的第二项可以忽略，有

$$\frac{C}{C_0}=\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{x-vt}{2\sqrt{Dt}}\right)\tag{6.4.10}$$

将式（6.4.10）改写为

$$\frac{C}{C_0}=1-N\left(\frac{x-vt}{\sqrt{2Dt}}\right)\tag{6.4.11}$$

式中：N（Z）为正态分布函数，$N(\mathrm{z})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Z}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$，根据正态分布函数的性质

$$N(1)=0.84,\qquad N(-1)=0.16$$

可以得到

$$\frac{x-vt_{0.16}}{\sqrt{2Dt_{0.16}}}=1,\qquad \frac{x-vt_{0.84}}{\sqrt{2Dt_{0.84}}}=-1\tag{6.4.12}$$

式中：$t_{0.16}$ 和 $t_{0.84}$ 分别表示在观测点 x 处的 $C/C_0 \sim t$ 的浓度过程线上 C/C_0 分别为 0.16 和 0.84 的 t 值。由式（6.4.12）可以得到

$$D=\frac{1}{8}\left[\frac{x-vt_{0.16}}{\sqrt{t_{0.16}}}-\frac{x-vt_{0.84}}{\sqrt{t_{0.84}}}\right]^2\tag{6.4.13}$$

式（6.4.12）常用于利用一维水动力弥散实验求解纵向弥散系数 D。

第五节　溶质运移问题的数值方法

对于一确定的定解问题，求解方法不外乎以下三种：解析方法、数值方法和实验模拟方法。解析方法只能应用于较简单的情况，要求边界形状规则，起始分布均匀，这在实际问题中很难满足。用实验模拟方法求解对流-弥散问题目前应用很少，在本书中拟不涉及。本节主要讨论求解对流-弥散方程的数值方法，主要为有限差分法和有限单元法。

一、　有限差分法

假设溶质在多孔介质中的运动过程中，不发生吸附、沉淀、衰变等化学作用，且也不与介质发生任何作用，描述一维溶质运动过程的水动力弥散方程可以写为：

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}D\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}VC \tag{6.5.1}$$

式中：C：溶质浓度；D：弥散系数，一般可以表示为$D=\alpha_L\,|V|$；α_L为纵向弥散度；V为平均孔隙流速。右端第一项表示水动力弥散作用，第二项表示对流作用。按照流速和弥散系数的大小不同，方程（6.5.1）可以呈为抛物型方程和双曲型方程的性质。

（一）　水动力弥散方程的差分法与数值困难

根据前述有限差分法的一般概念，可对研究区域$[x_0,x_L]$进行等距剖分，在所得剖分网各节点上对（6.5.1）式应用差分代替导数，即：

$$\left.\frac{\partial C}{\partial t}\right|_i^{k+1}\approx\frac{C_i^{k+1}-C_i^k}{\Delta t}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}D\frac{\partial C}{\partial x}\right|_i^{k+1}\approx\frac{1}{\Delta x^2}\left[D_{i+1/2}^{k+1}C_{i+1}^{k+1}-\left(D_{i+1/2}^{k+1}+D_{i-1/2}^{k+1}\right)C_i^{k+1}+D_{i-1/2}^{k+1}C_{i-1}^{k+1}\right]$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}VC\right|_i^{k+1}\approx\frac{1}{\Delta x}\left[V_{i+1/2}^{k+1}\frac{C_{i+1}^{k+1}+C_i^{k+1}}{2}-V_{i-1/2}^{k+1}\frac{C_i^{k+1}+C_{i-1}^{k+1}}{2}\right]$$

代入（6.5.1）式得到差分方程：

$$AD_{i-1}C_{i-1}^{k+1}+BD_iC_i^{k+1}+CD_iC_{i+1}^{k+1}=fD_i\quad(i=2,3,\cdots,n-1) \tag{6.5.2}$$

式中：$AD_{i-1}=-D_{i-\frac{1}{2}}^{k+1}-\frac{1}{2}\Delta xV_{i-\frac{1}{2}}^{k+1}$

$$BD_i = D_{i-\frac{1}{2}}^{k+1} + D_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} + \frac{\Delta x}{2} V_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} - \frac{\Delta x}{2} V_{i-\frac{1}{2}}^{k+1} + \frac{\Delta x^2}{\Delta t}$$

$$CD_i = -D_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} + \frac{1}{2} \Delta x V_{i+\frac{1}{2}}^{k+1}$$

$$fD_i = \Delta x^2 / \Delta t \cdot C_i^k$$

用差分方程式(6.5.2)计算水动力弥散问题时，常出现如下数值困难：

（1）数值弥散（numerical dispersion）

数值弥散是指在浓度锋面处，由数值法求得的浓度曲线形状比实际界面平缓。Lantz（1972）对一维对流——弥散方程进行了分析，认为产生数值弥散之主要原因是对于一阶导数和时间导数用差分代替时所引入的截断误差而致。显式差分格式比隐式差分格式所引入的数值弥散要小，认为对于显式差分格式只要适当选用空间步长和时间步长，可以充分减小数值弥散。但是，当 $\frac{D}{V} L < 10^{-3}$ 时，尽管可以通过适当选取空间步长和时间步长而得到较为满意的结果，然而此时空间步长和时间步长过小，使数值计算难以进行。

（2）数值跳动（过量，overshoot）

数值跳动是指在浓度锋面处，用数值计算求得的相对浓度大于最大值 1 或小于最小值 0，这种结果违背了基本的物理意义。过量是与数值弥散相伴随的另一种现象，二者是相互联系的，当应用一种算法力图减小数值弥散时，这时过量现象会越发严重，反之亦然。Fried(1975)认为，出现过量现象是由于时间步长与空间尺度匹配不佳，使得含水层在数值上不能“吸收”注入的污染物所引起的。

（3）导致物理失实的离散方程

与一般扩散方程（如渗流方程）的有限差分方程不同，由于水动力弥散方程中对流项的出现，使所得差分方程的系数矩阵不对称。为考查方程组（6.5.2）的性质，假设孔隙流速 V 为常数，这时有：

$$BD_i = 2D_i + \frac{\Delta x^2}{\Delta t} > 0$$

令 peclet 数 $p_e = \frac{V\Delta x}{D}$，courant 数 $c = \frac{V\Delta t}{\Delta x}$。

当 $p_e \le 2$ 时，方程组（6.5.2）中系数 AD_{i-1}，CD_i 都为负值，系数矩阵满足对角占优，也称弥散占优势。当 $p_e > 2$ 时，CD_i 变为正数，这时方程组（6.5.2）可能不再满足对角占优，也称对流占优势。对流占优给方程组的求解带来很多不利因素。

从物理概念上分析，一般情况下，当 i+1 节点的浓度增大，i 点的浓度也会增大，但在 $p_e > 2$ 时，由于系数 CD_i 与 BD_i 符号相同，而方程右侧为定量 C_i^k，当 C_{i+1} 增大时，i 节点浓度 C_i 则有可能会减小。这种情况下得到的差分格式在物理概念上是失真的，而这种失真则是由于剖分不当所引起的。

计算经验表明，对于小 peclet 数的情况，数值解与精确解非常接近。但对于大 peclet 数的情况，

数值解的过渡带变宽，浓度锋面变平缓，在锋面前后还出现解的跳动（过量）现象。

为解决这种困难，计算中常要求单元的 peclet 数 $p_e \leq 2$、courant 数 $c \leq 1$。然而这种要求大大增加了计算工作量。

以下几种数值方法是为解决对流项占主导优势时引起的跳动和数值弥散问题而提出的，各种方法也都各有其优缺点。

（二） 对时间导数采用高次近似的差分格式

如上所述，对时间导数用一阶差分近似时，应用隐式方法将引入数值弥散。为了减小数值弥散，对弥散系数较小的情况，可对时间导数采用高次近似的格式。

仍以方程(6.5.1)为例，等式右端的差分形式同前，对于左端的时间项，将 $\frac{\partial C}{\partial t}$ 在（x_i, t^{k+1}）处用泰勒级数展开：

$$\left.\frac{\partial C}{\partial t}\right|_i^{k+1} = \frac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2}\left.\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}\right|_i^{k+1} + O(\Delta t^2) \tag{6.5.3}$$

利用（6.5.3）式估计 $\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}$。当对流在溶质分散中起主要作用时，为估计 $\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}$，可以假设 D=0，这时，由(6.5.1)式，有：

$$\frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial \boldsymbol{t}} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{VC}) \tag{6.5.4}$$

上式对 t 求导，并利用式（6.5.4），得到：

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{C}}{\partial \boldsymbol{t}^2} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{t}}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{VC}\right) \approx -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{C}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{t}}\right) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{V}^2\frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)$$

代入（6.5.3）式得到：

$$\left.\frac{\partial C}{\partial t}\right|_i^{k+1} = \frac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(V^2\frac{\partial C}{\partial x}\right) - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \mathrm{o}\left(\Delta t^2\right) \tag{6.5.5}$$

将（6.5.1）式右端用差分代替后，将（6.5.5）代入得：

$$AT_{i-1}C_{i-1} + BT_iC_i + CT_iC_{i+1} = fT_i \tag{6.5.6}$$

式中：$AT_{i-1} = -D_{i-1/2}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2}V_{i-1/2}^2 - \frac{\Delta x}{2}\left(V_{i-1/2}^{k+1} - \frac{\Delta t}{2}\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{i-1/2}^{k+1}\right)$

$$DT_i = D_{i-1/2}^{k+1} - \frac{\Delta t}{2}V_{i+1/2}^2 + D_{i+1/2}^{k+1} - \frac{\Delta t}{2}V_{i-1/2}^{k+1} +$$
$$+\frac{\Delta x}{2}\left(-V_{i-1/2}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2}\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{i-1/2}^{k+1} + V_{i+1/2}^{k+1} - \frac{\Delta t}{2}\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{i+1/2}^{k+1}\right) + \frac{\Delta x^2}{\Delta t}$$

$$CT_i = -D_{i+1/2}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} V_{i+1/2}^2 + \frac{\Delta x}{2}\left(V_{i+1/2}^{k+1} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial V}{\partial t}\bigg|_{i-1/2}^{k+1} \right)$$

$$fT_i = \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \cdot C_i^k$$

经与解析解的比较结果表明（杨金忠，1986），对于流速为常数的情况，时间导数采用高次差分后，相当于对弥散系数加入修正项（$-\frac{\Delta t}{2}V^2$），弥散现象应有所改善，但在弥散系数很小时，所得结果仍出现跳动和数值弥散。

（三） 带有上风因子的差分格式

对于差分格式在物理概念上失真的问题，采用带有上风因子的差分格式（简称上风格式）是解决办法之一。上风格式也常称为逆风格式、逆流格式，是在单元质量均衡基础上，加强对流项入流方向的浓度对均衡区域的影响，以达到减少数值困难的方法。

上风差分格式的建立采用单元均衡法。首先将研究区域进行剖分，在剖分网格上建立与各个节点相应的均衡域。要求各个均衡域将整个研究区域覆盖，既没有重复也没有空余，并要求在均衡域的交接部位通量相容，从而可以保证在整个研究区域上质量守恒。剖分节点 i 的均衡域取为与其相邻两节点中点所构成的区域（图 6.4），记为 $\Omega_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$。

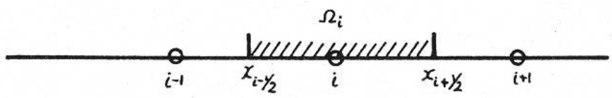


图 6.4　节点 i 均衡域 Ω_i

将一维水动力弥散方程（6.5.1）在 Ω_i 上积分，有：

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial C}{\partial t} \mathrm{d}x = \int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} VC \right) \mathrm{d}x$$

分别计算上式中各项：

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial C}{\partial t} \mathrm{d}x = \Delta_t C \cdot L_{x_i}$$

$$\int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} VC \right) \mathrm{d}x = \left(D \frac{\partial C}{\partial x} - VC \right) \bigg|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}$$

$$= D \frac{\partial C}{\partial x}\bigg|_{x_{i+1/2}} - D \frac{\partial C}{\partial x}\bigg|_{x_{i-1/2}} - VC\big|_{x_{i+1/2}} + VC\big|_{x_{i-1/2}}$$

代入前式得：

$$\Delta_t C_i \cdot L_{x_i} = D\frac{\partial C}{\partial x}\bigg|_{x_{i+1/2}} - D\frac{\partial C}{\partial x}\bigg|_{x_{i-1/2}} - VC\big|_{x_{i+1/2}} + VC\big|_{x_{i-1/2}} \tag{6.5.7}$$

式中：$L_{x_i} = \left|x_{i+1/2} - x_{i-1/2}\right| = \frac{1}{2}\left(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i\right)$；$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$；$\Delta_t C_i$表示在$L_{x_i}$上$\frac{\partial C}{\partial t}$的平均值。

对于均衡域Ω_i的边界点$x_{i+1/2}$处，其弥散通量和对流通量可分别表示为

$$D\frac{\partial C}{\partial x}\bigg|_{x_{i+1/2}} \approx D_{i+1/2}\frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta x_i} \tag{6.5.8}$$

$$VC\big|_{x_{i+1/2}} \approx V_{i+1/2}\left[\left(1-Q\right)C_{i+1} + QC_i\right] \tag{6.5.9}$$

式中：Q满足 $0 \leqslant Q \leqslant 1$，称为上风因子。

当$V_{i+1/2} > 0$时，$Q > 1/2$；当$V_{i+1/2} \le 0$时，$Q \le 1/2$。若$V_{i+1/2} > 0$，Q取值为 1（或$V_{i+1/2} \le 0$，Q取值为 0），则所得格式为完全上风格式。这时由于对流作用通过均衡域Ω_i的边界点$x_{i+1/2}$处的浓度取为入流方向节点的浓度。因此，上风格式在物理概念上强调了入流方向的浓度对均衡域的影响。

类似地，可得到$x_{i-1/2}$点处的对流-弥散通量：

$$\left(D\frac{\partial C}{\partial x} - VC\right)\bigg|_{x_{i-1/2}} \approx \left[\frac{D_{i-1/2}}{\Delta x_{i-1}} - V_{i-1/2}\left(1-Q\right)\right]C_i - \left[\frac{D_{i-1/2}}{\Delta x_{i-1}} + V_{i-1/2}Q\right]C_{i-1} \tag{6.5.10}$$

$\frac{\partial C}{\partial t}$在$\Omega_i$上的变化率取为 i 点的变化率，即

$$\Delta_t C_i = \frac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\Delta t} \tag{6.5.11}$$

将式（6.5.8）~（6.5.10）代入式（6.5.7），并取隐式格式得：

$$AU_{i-1}C_{i-1}^{k+1} + BU_iC_i^{k+1} + EU_iC_{i+1}^{k+1} = fU_i \tag{6.5.12}$$

式中：

$$AU_{i-1}=-\frac{D_{i-1/2}^{k+1}}{\Delta x_{i-1}}-V_{i-1/2}Q$$

$$BU_i=\frac{D_{i-1/2}^{k+1}}{\Delta x_{i-1}}-V_{i-1/2}\left(1-Q\right)+\frac{D_{i+1/2}^{k+1}}{\Delta x_i}+V_{i+1/2}Q+\frac{\Delta x_{i-1}+\Delta x_i}{2\Delta t}$$

$$EU_i=-\frac{D_{i+1/2}^{k+1}}{\Delta x_i}+V_{i+1/2}\left(1-Q\right)$$

$$fU_i=\frac{\Delta x_{i-1}+\Delta x_i}{2\Delta t}\cdot C_i^k$$

为进一步讨论方程（6.5.12）的性质，假设流速 V 为常数，当 V>0 时，取 Q=1，这时 AU_{i-1}、EU_i 符号相同，且与 BU_i 符号相反，方程组满足主对角占优，当浓度 C_{i+1} 或 C_{i-1} 增（减）时，浓度 C_i 也随之增减，从物理概念上看所取的格式是有意义的；当 V<0 时，取 Q=0，上面的条件仍能满足。这说明无论对于 Peclet 数多大，当采用上风格式时，都可以得到主对角占优的方程组，且解在物理意义上是真实的。但从误差上来看，采用上风差分格式中对流项的截断误差为 $0(\Delta x)$，其结果比一般差分格式（如中心差分格式）引入的误差要大。这是上风格式存在的固有缺点。

（四） 特征线方法

当对流-弥散方程[式(6.3.5)]中的流速 v 相对较大时，弥散项相对较小可忽略，方程呈现出一阶双曲型方程的性质，此时用特征线法求解双曲型方程比较有效。

利用特征线法的目的是减少方程(6.3.5)右端的一阶导数在差分离散时产生的数值弥散。以下说明其基本思路。

考虑二维稳定饱和渗流的水动力弥散方程

$$\frac{\partial C}{\partial t}=D_L\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+D_T\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}-v_x\frac{\partial C}{\partial x}-v_y\frac{\partial C}{\partial y} \tag{6.5.13}$$

式中: v_x、v_y 为平均孔隙流速；D_L、D_T 分别为纵向和横向弥散系数。

在离散方程(6.5.13)时，不离散右端的一阶导数项，而引进一个动坐标。对于流场内任一质点（x,y）在某一时刻 t 位于位置

$$x=x\left(t\right),\quad y=y\left(t\right) \tag{6.5.14}$$

的运动质点来说，其运动速度即平均孔隙流速（实际平均流速）为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t},\quad v_y=\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} \tag{6.5.15}$$

该方程为动坐标的运动方程，也称为方程(6.5.13)的特征方程。满足方程(6.5.15)的曲线称为特征（曲）线。沿此特征线的浓度变化为 $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}$，根据全导数的定义，有

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial C}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{6.5.16}$$

将式(6.5.15)代入式(6.5.16)，并对照方程(6.5.13)，得

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}=D_L\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+D_T\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \tag{6.5.17}$$

可见，通过特征方程的转换以后，方程(6.5.13)可用方程(6.5.17)来描述，而后者不含有一阶导数项，从而减少或避免由于对一阶导数离散产生的数值弥散问题。这样，求解式(6.5.13)的问题就转化为求解式(6.5.17)和式(6.5.15)所构成的微分方程组的问题。

薛禹群与谢春红（1980）对特征线法进行了解释：当我们在一个静止坐标系中观察地下水中溶质运移时，不仅能观察到水动力弥散，还能看到溶质随水流一起运移，即对流。但当我们跟着一个以平均流速 v 运动的质点观察时则看不到对流（即对流项不出现），只看到相对于对流的水动力弥散。而式(6.5.17)的解 $C=C(t)$正是表示沿特征线(6.5.15)运动的质点的浓度随时间的变化。因此，只要在渗流区内绘出很多特征线，沿这些特征线，解出由于水动力弥散所导致的浓度的变化，即在 Lagrange 观点下求得了对流-弥散方程的解。但这种 Lagrange 观点下的解不够直观。为此，人们通常要先确立一个固定坐标系，通过固定坐标系中一群移动质点的移动来勾画出上述特征线簇，再把动点的浓度变化转换到固定的差分网格点上，就可以得到人们习惯的浓度分布，即在 Euler 观点下的浓度分布。这就是特征线法的基本思想实际上是一种 Euler-Lagrange 解法。

特征线法首先需将研究区域剖分为有限差分矩形网格，节点置于网格区域 R_{ij} 的中心点（图 6.5a）。在每个网格中放入一定量的运动质点，一般放 4 个，也有多到 9 个的（质点太少，计算出的浓度变化不均匀；太多，计算工作量增加）。在每个计算时段中由式(6.5.15)决定质点的运动位置，由此可追踪质点的位移（图 6.5b）。由于每个质点本身都有一定位置并具有相应的浓度，通过质点的位移，就可以确定出由于对流作用而引起质点浓度的变化，然后再由式(6.5.17)确定由于水动力弥散作用所引起节点溶质浓度的变化。

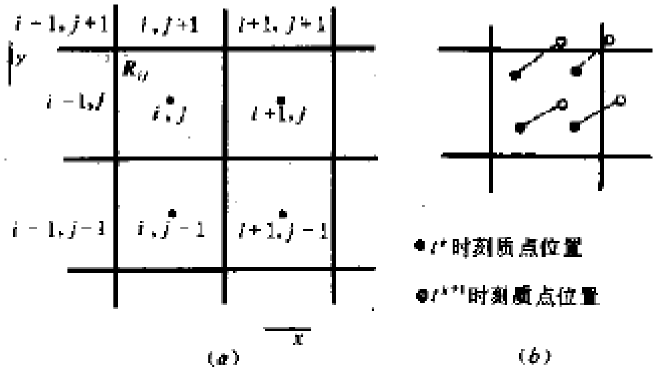


图 6.5　计算剖分图

计算过程如下：

（1）计算纯对流引起的暂时浓度

图 6.5b 表示在一个网格区域 R_{ij} 中放入 4 个质点，令这些质点的初始浓度等于同一网格内节点（i,j）的初始浓度 $C_{i,j}^0$。如质点 m 位于网格中，则有 $C_m^0=C_{i,j}^0$。

为了确定由对流引起的浓度变化，首先需要追踪质点的位移。设质点 p 在 t^k 时刻的位置为（x_p^k, y_p^k），浓度为 C_p^k。p 点在 t^{k+1} 时刻的位置可由式(6.5.15)的差分近似确定：

$$x_p^{k+1} = x_p^k + \Delta t \cdot v_{x_p}^k \tag{6.5.18a}$$

$$y_p^{k+1} = y_p^k + \Delta t \cdot v_{y_p}^k \tag{6.5.18b}$$

式中：$v_{x_p}^k, v_{y_p}^k$ 为质点 p 在 t^k 时刻分别沿 x 和 y 方向的平均孔隙流速，其值可以由邻近节点流速的双线性插值求得，而各节点的流速是通过求解水流方程，并由达西公式确定；若在Δt 时间内 v_x，v_y 不变，p 点在 t^{k+1} 时刻的位置直接利用式(6.5.18a)和式(6.5.18b)计算；若在Δt 时间内 v_x，v_y 有明显变化，需将Δt 分 n 步计算，每一步分别取用不同位置的 v_x，v_y，按上述两式分步计算，以获得较精确的新位置 x_p^{k+1}, y_p^{k+1}。但此法要花费的机时较多。所有质点都进行上述计算后，便得到 t^{k+1} 时刻质点的新的分布。

将 t^{k+1} 时刻所有落入网格 R_{ij} 中质点浓度的平均值作为节点（i,j）的浓度，用 $C_{i,j}^{*,k+1}$ 表示，*号用以表示该浓度值只是该时刻由于对流作用而产生的暂时浓度，而非最终浓度。

在一个网格 R_{ij} 中如何计算各质点浓度的平均值将影响浓度的计算结果。Huyakorn 和 Pinder(1983)认为，当质点通过 R_{ij} 的边界进入相邻网格会造成相邻网格间浓度平均值出现大的波动，纯粹的算术平均会导致浓度值的跳跃。因此，他们建议每个质点给一个作用面积（三维时为体积），随质点一起运动，按照落在每个网格内该质点作用面积的比例来分配相应的浓度值。如图 6.6 所示，当质点 1 从网格 R_{ij} 移动到新的位置后，其作用面积在网格 R_{ij}、$R_{i+1,j}$、$R_{i+1,j+1}$、$R_{i,j+1}$ 中都有分布，就按各网格所包含的作用面积的比例（如网格 $R_{i,j+1}$ 为 $A'_{i,j+1}/A_{i,j}$ ）来分配质点 1 的浓度给这个网格。这种平均方法在程序设计中较为麻烦，但可以得到更精确的结果。

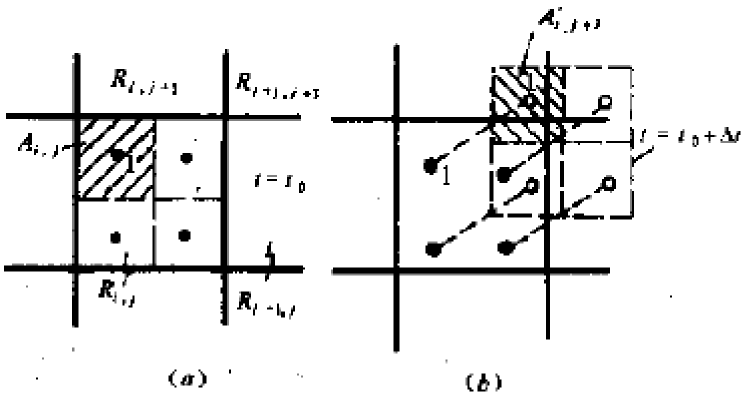


图 6.6　单元中质点浓度平均值计算示意图

孙讷正(1989)提出找出与所考虑节点(i, j)横向距离不超过 $1.5\Delta x$，纵向距离不超过 $1.5\Delta y$ 的所有质点 p，按距离加权平均来计算质点浓度平均值，即

$$C_{i,j}^{*k+1}=\frac{\left(\sum_{p}\frac{C_p^k}{d_{i,j,p}}\right)}{\left(\sum_{p}\frac{1}{d_{i,j,p}}\right)} \tag{6.5.19}$$

式中：$d_{i,j,p}$表示质点p与节点(i, j)间的距离。这样做在程序上比较容易处理。

（2）纯弥散部分的节点浓度及t^{k+1}时刻节点总浓度计算

t^{k+1}时刻节点的总浓度还包括水动力弥散作用和除对流以外其他作用引起的浓度变化。由于在对流部分计算时已限制了时间步长不能太大，因此在弥散部分的计算中可以用显式差分格式。对式(6.5.17)的各项差分后，有

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}=\frac{C_{i,j}^{k+1}-C_{i,j}^{k}}{\Delta t}\cong\frac{\Delta C_{i,j}^{k+1}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}=\frac{C_{i+1,j}^{*k+1}-2C_{i,j}^{*k+1}+C_{i-1,j}^{*k+1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}=\frac{C_{i,j+1}^{*k+1}-2C_{i,j}^{*k+1}+C_{i,j-1}^{*k+1}}{(\Delta y)^2}$$

将上述差分近似式代入式(6.5.17)，可得到差分方程

$$\Delta C_{i,j}^{k+1}=\frac{\Delta t\cdot D_L}{(\Delta x)^2}\left(C_{i+1,j}^{*k+1}-2C_{i,j}^{*k+1}+C_{i-1,j}^{*k+1}\right)+\frac{\Delta t\cdot D_T}{(\Delta y)^2}\left(C_{i,j+1}^{*k+1}-2C_{i,j}^{*k+1}+C_{i,j-1}^{*k+1}\right) \tag{6.5.20}$$

式中：$\Delta C_{i,j}^{k+1}$表示由于水动力弥散引起节点的浓度变化值；右端的$C_{i,j}^{*,k+1}$（也可以采用$C_{i,j}^{*,k}$和$C_{i,j}^{*,k+1}$的平均值）已由对流部分的计算得出，是已知量。当存在源汇项时，还应考虑由于源汇、化学或生物化学作用、吸附与解吸等对浓度的影响。

t^{k+1}时刻节点的总浓度值由下式确定：

$$C_{i,j}^{k+1}=C_{i,j}^{*k+1}+\Delta C_{i,j}^{k+1} \tag{6.5.21}$$

相应地，t^{k+1}时刻质点p的总浓度为

$$C_p^{k+1}=C_p^k+\Delta C_p^{k+1} \tag{6.5.22}$$

式中：ΔC_p^{k+1}表示质点p由于水动力弥散作用引起的浓度变化值，该变化值是随节点浓度的变化而变化的。在计算ΔC_p^{k+1}时应格外小心，以防出现负浓度值C_p^{k+1}。根据计算经验，ΔC_p^{k+1}可用以下方法确定：

若 $\Delta C_{i,j}^{k+1} > 0$，则取 $\Delta C_p^{k+1} = \Delta C_{i,j}^{k+1}$；若 $\Delta C_{i,j}^{k+1} < 0$，则取 $\Delta C_p^{k+1} = \Delta C_{i,j}^{k+1} \dfrac{C_p^k}{C_{i,j}^{*k+1}}$，因为将其代入式(6.5.22)后，得 $C_p^{k+1} = C_p^k \left(1 - \dfrac{\Delta C_{i,j}^{k+1}}{C_{i,j}^{*k+1}}\right) \geq 0$，故可保证 C_p^{k+1} 非负。

重复上述过程，便可求得不同时刻的浓度分布。

为了保持前述显式差分格式的稳定，Δt 必须取得足够地小。为此，在 Δt 取值时应满足下列三个定性准则（Huyakorn & Pinder, 1989）：

1）类同于水流问题的稳定准则，一般取 Δt 满足：

$$\Delta t \leq \min_{\text{整个区域}} \left\{ 0.5 \Big/ \left[\frac{D_L}{(\Delta x)^2} + \frac{D_T}{(\Delta y)^2} \right] \right\} \tag{6.5.23}$$

2）要求单元 Courant 数小于 1，即 $\Delta t \cdot v_{x_p} \leq \Delta x,\ \ \Delta t \cdot v_{y_p} \leq \Delta y$。因为质点流速小于或等于整个区域中的最大孔隙流速，以上条件可以写为

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{(v_x)_{\max}}, \quad \Delta t \leq \frac{\Delta y}{(v_y)_{\max}} \tag{6.5.24}$$

（3）边界条件和源汇项的处理

在研究区的隔水边界和源、汇附近，质点运移会碰到许多麻烦，需要进行特殊处理。

在有水流流入的边界处，当原来放置的质点移出紧靠边界的网格时，要及时补充同等数量的新质点，其浓度等于流入液体所含溶质的浓度。在有水流流出的边界处，网格中的质点应任其移出边界。隔水边界附近的质点按式(6.5.18)计算时会流入隔水边界内，为了满足在隔水边界上没有水流通过的条件，通过边界映射再把该质点返回到含水层中（图 6.7）。

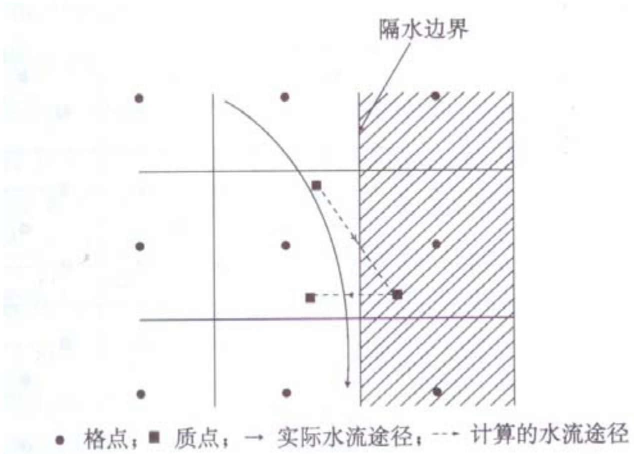


图 6.7 隔水边界处的映射

源汇项往往是地下水流速的奇异点。对于源节点，流速为径向发散的，质点会连续移出网格单元而导致空白单元，为保证流体和溶质的连续性，在源所在的网格单元中需不断加入新的质点。

移出一个质点，立即补充一个新质点。图 6.8 表示当区域水流比较弱的情况下，一个不与隔水边界相邻的源所在网格的质点补充过程。当区域水流比较强时，可能会有质点从外面进入源所在的网格然后又离去，这些质点不用补充，因为它们并不是来自源所在的网格。图 6.9 表示与隔水边界相邻的源所在网格质点的补充过程。随着源所在网格中质点的离去，并在相邻的网格中占据新的位置时，在同一相对位置上需要补充新的质点以维持稳定、均匀的质点流。

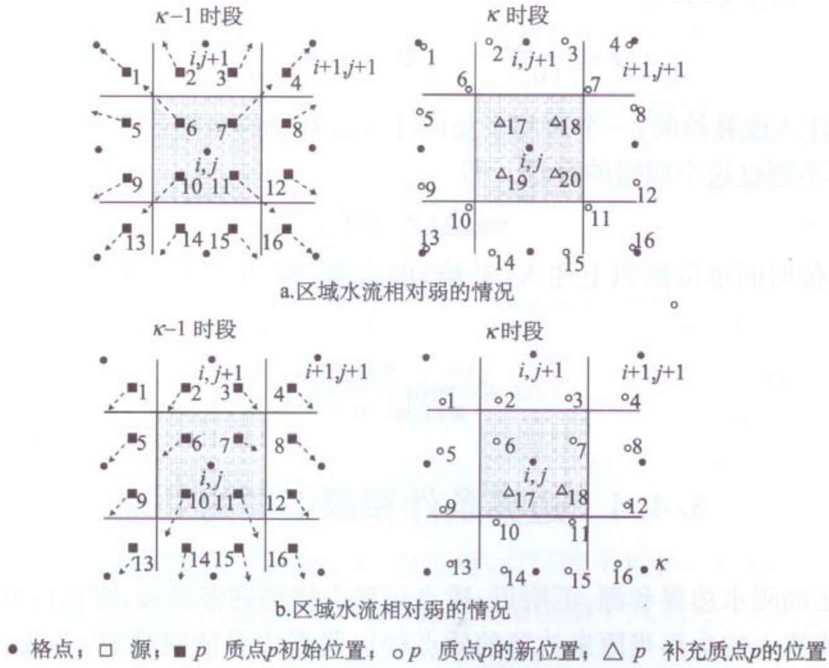


图 6.8 一个不与隔水边界相邻的源所在网格的质点补充

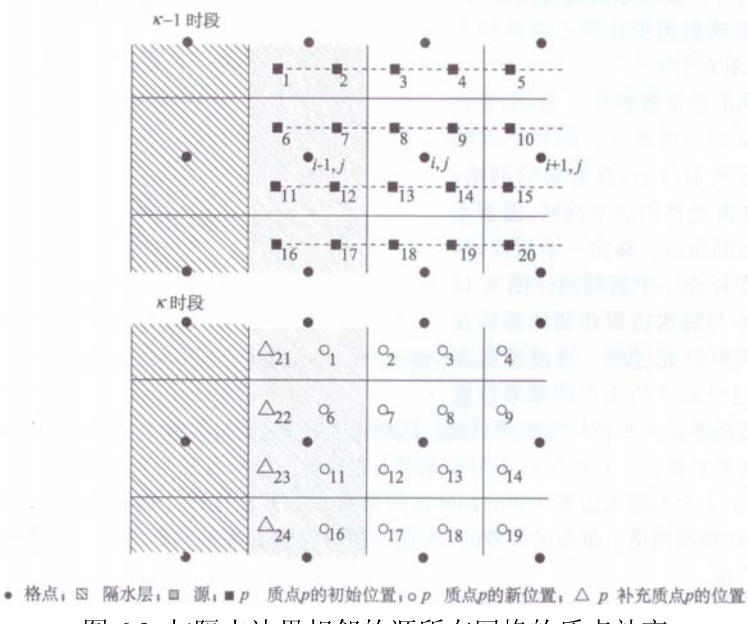


图 6.9 与隔水边界相邻的源所在网格的质点补充

有汇的网格会有质点不断移进，需要不断地取消一些已完成该时间步长所有计算的质点，以避免质点过挤。

上述方法原理简明，但由于要求特殊处理的情况多，程序比较繁杂，且计算精度也不高。

特征线法适合于浓度梯度较大的运移问题的求解，其主要缺陷是需要追踪大量质点造成计算

效率低；其次，由于此法并不是完全基于质量守恒原理，在某些情况下会导致出现大的质量均衡误差。

为了解决计算效率低的问题，一些学者提出了减少了质点数量，用向后追踪前一时刻的位置，用该位置对应的浓度来近似由对流引起的浓度变化。其他步骤均与特征线法相同。

二、 有限元法

目前常用的有限元法主要有两种：基于变分原理的里茨法有限元和加权余量法有限元。用变分有限元求解溶质运移方程一般要经过适当变换，将不自伴的方程变换为自伴，经有限元离散后，所得方程组系数矩阵为正定的，在数值求解时，占用内存少，求解速度快。但是，这种变换常为指数变换，当对流作用较强时，由于指数过大，变换难以实现。而且变换和反变换本身也要引入较大误差。对于一般问题，相应的泛函也较难找到。目前在求解水动力弥散方程中应用较广的是加权剩余法，尤其是 Galerkin（迦辽金）有限元法。本节主要介绍这种方法。

（一） 对流-弥散方程的 Galerkin 有限元模型

对于二维对流-弥散方程

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\frac{\partial C}{\partial x}+D_{xy}\frac{\partial C}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_{yx}\frac{\partial C}{\partial x}+D_{yy}\frac{\partial C}{\partial y}\right)-v_x\frac{\partial C}{\partial x}-v_y\frac{\partial C}{\partial y} \tag{6.5.25}$$

对应的初始和边界条件为

$$\begin{aligned}
&C(x,y,t)\big|_{t=0}=C_0(x,y) && (x,y)\in\Omega\\
&C(x,y,t)\big|_{\Gamma_1}=C_1(x,y,t) && (x,y)\in\Gamma_1\\
&\left[\left(D_{xx}\frac{\partial C}{\partial x}+D_{xy}\frac{\partial C}{\partial y}\right)n_x+\left(D_{yx}\frac{\partial C}{\partial x}+D_{yy}\frac{\partial C}{\partial y}\right)n_y\right]_{\Gamma_2}=q_m && (x,y)\in\Gamma_2
\end{aligned} \tag{6.5.26}$$

式中：Γ_1 和 Γ_2 分别为域Ω上的第一类、第二类边界；n_x、n_y 为 Γ_2 的外法线方向单位矢量在 x，y 轴方向的分量；C_0，C_1 和 q_m 为已知函数。

记式(6.5.25)为

$$L(C)=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\frac{\partial C}{\partial x}+D_{xy}\frac{\partial C}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_{yx}\frac{\partial C}{\partial x}+D_{yy}\frac{\partial C}{\partial y}\right)-v_x\frac{\partial C}{\partial x}-v_y\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial C}{\partial t}=0 \tag{6.5.27}$$

式中：$L(C)$是微分算子。

Galerkin 有限元法是寻找一个级数形式的试函数作为微分方程的近似解，并使其满足给定的边界条件，即

$$\tilde{C}(x,y,t)=\sum_{i=1}^{n}C_i(t)\phi_i(x,y) \tag{6.5.28}$$

式中：$\tilde{C}(x,y,t)$是浓度 C 的近似解或试探解；n 为节点总数；$C_i(t)$为 t 时刻节点 i 的浓度；$\varphi_i(x,y)$是关于节点 i 的基函数，为线性无关函数，并要求其满足待求问题的一定边界条件，如果 $n\to\infty$，则 $\tilde{C}$ 趋于微分方程(6.5.25)的精确解。

由于 $\tilde{C}$ 是 C 的近似解，则有

$$L(C)-L(\tilde{C})=R(x,y)\neq 0 \tag{6.5.29}$$

其中，$R(x,y)$是一个残差函数，也称为剩余。显然，当满足剩余 $R(x,y)=0$ 时，近似解 $\tilde{C}$ 就是精确解 C。按某种方法确定一组权函数 $W_i(x,y)$，在函数定义区域Ω上，令剩余的加权积分等于零，即

$$\iint_{\Omega} R(x,y)\cdot W_i(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{6.5.30}$$

依照权函数 $W_i(x,y)$的不同取法，可得到不同的加权剩余法。当取 $W_i(x,y)$等于基函数 $\varphi_i(x,y)$时，即为 Galerkin 有限元法，此时，式(6.5.30)成为

$$\iint_{\Omega} R(x,y)\cdot \phi_i(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{6.5.31}$$

这里，$R(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\dfrac{\partial \tilde{C}}{\partial x}+D_{xy}\dfrac{\partial \tilde{C}}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(D_{yx}\dfrac{\partial \tilde{C}}{\partial x}+D_{yy}\dfrac{\partial \tilde{C}}{\partial y}\right)-v_x\dfrac{\partial \tilde{C}}{\partial x}-v_y\dfrac{\partial \tilde{C}}{\partial y}$。

对式(6.5.31)中的二阶导数项应用 Green 公式，有

$$\iint_{\Omega}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \tilde{C}}{\partial t}\cdot\phi_i+v_x\dfrac{\partial \tilde{C}}{\partial x}\cdot\phi_i+v_y\dfrac{\partial \tilde{C}}{\partial y}\cdot\phi_i+D_{xx}\dfrac{\partial \tilde{C}}{\partial x}\dfrac{\partial \phi_i}{\partial x}\\ +D_{xy}\dfrac{\partial \tilde{C}}{\partial y}\dfrac{\partial \phi_i}{\partial x}+D_{yx}\dfrac{\partial \tilde{C}}{\partial x}\dfrac{\partial \phi_i}{\partial y}+D_{yy}\dfrac{\partial \tilde{C}}{\partial y}\dfrac{\partial \phi_i}{\partial y}\end{bmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\Gamma_2} q_m\cdot\phi_i\mathrm{d}\Gamma \tag{6.5.32}$$

式中：Γ 为域Ω的边界，可为一类边界或二类边界；右端项视边界的性质不同而采用不同形式，这里采用的是二类弥散边界。

把式(6.5.28)代入式(6.5.32)，并进一步离散化，按单元逐个计算上述积分，然后求和，得到

$$\begin{aligned}&\sum_e\left\{\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\iint_e\begin{bmatrix}D_{xx}\dfrac{\partial \phi_j}{\partial x}\dfrac{\partial \phi_i}{\partial x}+D_{xy}\dfrac{\partial \phi_j}{\partial y}\dfrac{\partial \phi_i}{\partial x}+D_{yx}\dfrac{\partial \phi_j}{\partial x}\dfrac{\partial \phi_i}{\partial y}\\ +D_{yy}\dfrac{\partial \phi_j}{\partial y}\dfrac{\partial \phi_i}{\partial y}+v_x\dfrac{\partial \phi_j}{\partial x}\cdot\phi_i+v_y\dfrac{\partial \phi_j}{\partial y}\cdot\phi_i\end{bmatrix}C_j\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &+\sum_{j=1}^{n}\iint_e\frac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t}\phi_j\phi_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}\right\}\\ &=\sum_e\int_l\left[\left(D_{xx}\frac{\partial \tilde{C}}{\partial x}+D_{xy}\frac{\partial \tilde{C}}{\partial y}\right)n_x+\left(D_{yx}\frac{\partial \tilde{C}}{\partial x}+D_{yy}\frac{\partial \tilde{C}}{\partial y}\right)n_y\right]\cdot\phi_i\mathrm{d}\Gamma\end{aligned} \tag{6.5.33}$$

式中：l 为 Γ 上单元 e 的线元。上式写成矩阵形式为

$$[A]\{C\}+[E]\left\{\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}\right\}=\{F\} \tag{6.5.34}$$

式（6.5.34）各元素展开分别为

$$A_{ij}=\sum_e\iint_e\begin{bmatrix}D_{xx}\dfrac{\partial\phi_j}{\partial x}\dfrac{\partial\phi_i}{\partial x}+D_{xy}\dfrac{\partial\phi_j}{\partial y}\dfrac{\partial\phi_i}{\partial x}+D_{yx}\dfrac{\partial\phi_j}{\partial x}\dfrac{\partial\phi_i}{\partial y}\\+D_{yy}\dfrac{\partial\phi_j}{\partial y}\dfrac{\partial\phi_i}{\partial y}+v_x\dfrac{\partial\phi_j}{\partial x}\cdot\phi_i+v_y\dfrac{\partial\phi_j}{\partial y}\cdot\phi_i\end{bmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$E_{ij}=\sum_e\iint_e\phi_j\phi_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$F_i=\sum_e\int_l\left[\left(D_{xx}\frac{\partial\tilde{C}}{\partial x}+D_{xy}\frac{\partial\tilde{C}}{\partial y}\right)n_x+\left(D_{yx}\frac{\partial\tilde{C}}{\partial x}+D_{yy}\frac{\partial\tilde{C}}{\partial y}\right)n_y\right]\cdot\phi_i\mathrm{d}\Gamma$$

式(6.5.34)是一个常微分方程组。对方程组中的导数项采用差分近似，可将其转化为代数方程组，其中导数项的系数 D_{xx}，D_{xy}，D_{yx}，D_{yy}，v_x，v_y 可表示为基函数 ϕ_i 的线性插值。

由 Galerkin 有限元法所表示的方程组与按照变分原理导出的方程组是相同的，并可用于所有的控制方程，同时也适用于非线性问题。因此，该方法在工程技术中应用得更普遍。

（二） 上风有限元法

当用 Galerkin 有限元法求解对流为主的对流-弥散方程时，在较大浓度梯度的浓度锋面附近也会出现振动。采用上风有限元法（或上游加权有限元法）可以减少这种振动，但又常以增大数值弥散为代价。

仿效上风差分格式的思想，上游加权有限元法通过选择非对称的加权函数 ω_i 来加强来水方向的影响，以减少振动。

对于一维对流-弥散问题：

$$L(C)=\frac{\partial C}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial(vC)}{\partial x}=0 \tag{6.5.35}$$

相应的加权剩余关系为

$$\int_L L(\tilde{C})\cdot\omega_i(x)\mathrm{d}x=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{6.5.36}$$

其中，$\tilde{C}$ 为试函数，设试函数为

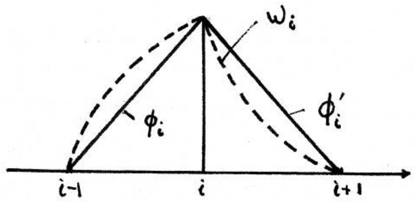
$$\tilde{C}=\sum_{j=1}^{N}C_j(t)\phi_j(x) \tag{6.5.37}$$

将式(6.5.37)代入式(6.5.36)，由分部积分可得到

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial C_j}{\partial t}\int_{L_j}\phi_j\cdot\omega_i\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{N}C_j\int_{L_j}\left[D_x\frac{\partial\phi_j}{\partial x}\cdot\frac{\partial\omega_i}{\partial x}-v\phi_j\cdot\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right]\mathrm{d}x$$
$$+\int_{\Gamma}\left[v\tilde{C}-D_x\frac{\partial\tilde{C}}{\partial x}\right]\cdot\omega_i\mathrm{d}\Gamma=0\qquad\left(i=1,2,\ldots,n\right)\tag{6.5.38}$$

取基函数$\phi_i\left(x\right)$为线性函数，设权函数的形式为（如图 6.10）

$$\omega_i=\phi_i+\alpha F\left(x\right)\qquad x\in\left[x_{i-1},x_i\right]$$
$$\omega_i=\phi_i'-\alpha F\left(x\right)\qquad x\in\left[x_i,x_{i+1}\right]$$



$F(x)$为分段的二次函数，并要求其在各节点为 0，可表示为

图 6.10 权函数

$$F\left(x\right)=-\frac{3}{h^2}x\left(x-h\right)\tag{6.5.39}$$

式中：h 为单元长度；参数 α 取值为$\left|\alpha\right|\le1$，当 $v\ge0$ 时，$\alpha\ge0$；当 $v\le0$ 时，$\alpha\le0$。

α 表示了上风加权的程度，根据各单元流速的不同可以选取 α 的大小和符号。当 $\alpha=0$ 时，所得结果与伽辽金有限元相同。当 $\alpha=1$ 时，对一维情况，所得结果与上风有限差相同。

上述结果可类似地推广到多维情况。Payre 等（1982）提出一种简单的方法来推导上风有限元方程。Sun 和 Yeh（1983）从单元均衡的积分方程出发推导出一种考虑了上风因素的数值方法。上风因子直接体现在基函数中，其值由局部的 Peclet 数决定，这种方法对消除振动现象是有效的。

（三） 特征方法与有限元结合

如前所述，特征方法可以消除数值弥散、跳动，并可以采用大的时间步长和空间步长，而有限元对于求解不规律边界等问题则很有效。下面将特征方法和有限元素法相结合，并应用时—空有限元离散来求解对流-弥散方程。

考虑方程：

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}D_x\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}D_y\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}uC-\frac{\partial}{\partial y}vC\tag{6.5.40}$$

设近似解为：

$$\widetilde{C}=\sum_{i=j}^{n}C_j w_i(x,y,t)\tag{6.5.41}$$

对式（6.5.40）应用加权残差：

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\Omega}\left[\widetilde{C}\frac{\partial w_i}{\partial t}+D_x\frac{\partial\widetilde{C}}{\partial x}\frac{\partial w_i}{\partial x}+D_y\frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial w_i}{\partial y}-u\widetilde{C}\frac{\partial w_i}{\partial x}-v\widetilde{C}\frac{\partial w_i}{\partial y}\right]d\Omega dt$$
$$-\int_{\Omega}\left[\widetilde{C}(x,y,t^{n+1})w_i(x,y,t^{n+1})-\widetilde{C}(x,y,t^n)w_i(x,y,t^n)\right]d\Omega$$

$$-\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\Gamma}\left[D_x\frac{\partial\widetilde{C}}{\partial x}n_x+D_y\frac{\partial\widetilde{C}}{\partial y}n_y-\widetilde{C}(un_x+vn_y)\right]w_i d\Gamma dt=0 \tag{6.5.42}$$

在 t^n 时刻研究区域 Ω 剖分为三角形单元，设一典型单元为：

$$(P_i^n, P_j^n, P_k^n), \qquad P_L^n=(x_i^n, y_i^n, t^n)$$

在 t^{n+1} 时刻，此典型单元为 $(P_i^{n+1}, P_j^{n+1}, P_k^{n+1})$。

其中任一 P_i^{n+1} 的方向是由（6.5.40）的特征方程确定：

$$x_i^{n+1}=x_i^n+(t^{n+1}-t^n)u(P_i^n)$$

$$y_i^{n+1}=y_i^n+(t^{n+1}-t^n)v(P_i^n)$$

单元可以分为两类，在流入边界处出现楔型单元，其余为三角棱体单元（图 6.11）。

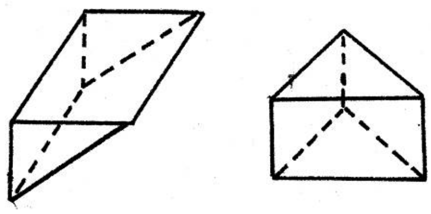


图 6.11 单元形状

在这些单元上构造插值函数后代入式（6.5.42）中求解。

当取线性插值函数时，对于 $D_x=D_y=0$，$u=cont$，$v=cont$，可得到精确的对流问题的解：

$$C_p^{n+1}=C_p^n$$

当 v=0，u=0 时，问题简化为一般的有限元法。

（四） 在运动坐标系中求解对流－弥散方程

在运动坐标系中求解对流-弥散方程的数值方法，是在原有固定剖分网的基础上叠加一个随水流质点（也是单元节点）运动的剖分网，各水流质点的浓度由运动网上节点浓度决定；在一定时刻，将运动网上各节点浓度投影到固定剖分网上，而得到固定节点的浓度分布。该方法把对流和弥散分开计算，从而消除了对流项对数值计算的影响。

为便于对运动质点进行追踪计算，需引入随体导数概念，即把运动质点浓度变化率作为局部导数和对流导数之和，即

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial C}{\partial t}+v_i\frac{\partial C}{\partial x_i} \tag{6.5.43}$$

将对流-弥散方程(6.3.5)代入上式，经整理后有

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}\right)-C\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \tag{6.5.44}$$

现以一维问题为例说明水动力弥散方程的求解方法。考虑各点以流体运动速度移动的坐标网，在这个坐标网上一维对流-弥散方程可以写为

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\frac{\partial C}{\partial x}\right)-C\frac{\partial v}{\partial x} \tag{6.5.45}$$

式中：$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}$表示运动质点随时间的变化率。方程(6.5.44)和(6.5.45)在形式上不出现对流项，有成功的求解方法。

设在 t^k 时刻将研究区域剖分，得剖分网 G_I^k，G_I^k 上每一个节点记为 x_i^k，将每一个节点 x_i^k 作为流体质点。现考虑流体质点的运动。在 t^{k+1} 时刻，运动质点位置为 x_i^{k+1}，相应的运动网记为 G_I^{k+1}。运动点 x_i^{k+1} 与点 x_i^k 之间的关系满足：

$$x_i^{k+1}=x_i^k+\int_{t^k}^{t^{k+1}}v\left[x_i\left(t\right),t\right]\mathrm{d}t \tag{6.5.46}$$

若已知 t^{k+1} 时刻某质点的位置坐标为 x_i^{k+1}，则由上式也可以得到该质点在 t^k 时刻的位置 x_i^k。

在运动坐标网 G_I^{k+1} 上用 Galerkin 有限元法求解式（6.5.45），有

$$\int\frac{\mathrm{d}\tilde{C}}{\mathrm{d}t}\cdot\phi_i\mathrm{d}x=\int\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\frac{\partial\tilde{C}}{\partial x}\right)-\tilde{C}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\phi_i\mathrm{d}x \tag{6.5.47}$$

其中试函数为：

$$\tilde{C}=\sum_{j=1}^{n}C_j\phi_j\left(x\right) \tag{6.5.48}$$

整理式(6.5.47)可得到常微分方程组：

$$\left[A\right]\left\{C\right\}+\left[E\right]\left\{\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}\right\}=\left\{F\right\} \tag{6.5.49}$$

式中，各元素展开分别为

$$A_{ij}=\sum_e\left(\int_e D_{xx}\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_j}{\partial x}\mathrm{d}x+\int_e\frac{\partial v}{\partial x}\phi_i\phi_j\mathrm{d}x\right)$$

$$E_{ij}=\sum_e\int_e\phi_i\phi_j\mathrm{d}x$$

$$F_i=\sum_e\int_e D\frac{\partial\tilde{C}}{\partial x}\cdot\phi_i\mathrm{d}x$$

由积分式$\int\phi_i^a\phi_j^b\mathrm{d}x=\frac{a!\ b!}{\left(a+b+1\right)!}\Delta x$ 和一维线性单元基函数$\phi_i\left(x\right)=\frac{x-x_j}{\Delta x}$，可得到每个单元 e 对矩阵[A]、[E]的贡献矩阵分别为

$$A^e=\begin{bmatrix}\frac{D}{L}+\frac{L}{3}\frac{\partial v}{\partial x} & -\frac{D}{L}+\frac{L}{6}\frac{\partial v}{\partial x}\\ -\frac{D}{L}+\frac{L}{6}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{D}{L}+\frac{L}{3}\frac{\partial v}{\partial x}\end{bmatrix}^e$$

$$E^e=\begin{bmatrix}\frac{L}{3} & \frac{L}{6}\\ \frac{L}{6} & \frac{L}{3}\end{bmatrix}^e$$

对方程组(6.5.49)中的时间导数取隐式差分，可得到

$$\left([A]+{[E]}/{\Delta t}\right)\{C\}_{x_i^{k+1}}={[E]}/{\Delta t}\cdot\{C\}_{x_i^k}+\{F\} \tag{6.5.50}$$

式中：$C_{x_i^k}$ 表示在 x_i^k 点上的浓度值。[A]、[E]均在 t^{k+1} 时刻取值。

为叙述方便，不妨设 t^{k+1} 时刻的浓度 $C_{x_i^{k+1}}$ 未知，而 t^k 时刻的浓度已知。t^{k+1} 时刻的剖分网用 G_I^{k+1} 表示，t^k 时刻的剖分网用 G_I^k 表示。

第六节　常用饱和-非饱和水流与溶质运移模型简介

以下对国内外常用的模拟饱和-非饱和水流和溶质运移的模型作简单介绍，包括一维、二维和三维的商业软件 HYDRUS1D、HYDRUS2D、FEFLOW，同时介绍了我们应用较多的 SWMS 模型和我们开发研制的分析氮磷转化运移的 NPTTM 模型。

一、 HYDRUS1D 模型

（一） 模型基本情况简介

最新版本的 HYDRUS1D 模型可用于模拟地下饱和-非饱和流带一维水分运移、热运移、溶质运移、CO_2 转化生成、离子及碳酸盐反应等，同时支持一些参数反演功能。土壤可以是非均质或分层的，可用可动-不可动模型和区模型求解溶质运移问题，水流方程中可考虑根系吸水、土壤水分运动参数的滞后作用，采用了计算腾发量的彭曼-蒙特斯公式和哈格里夫斯公式。

该模型主要包括 HYDRUS1D 主模块，position 模块和 profile 模块。HYDRUS1D 主模块包括主程序单元、参数输入单元和图表输出单元。主程序单元包括了软件的主界面，根据计算需要对程序中可选择的模块进行取舍。输入单元按提示输入计算所需要的物理几何信息、土壤水分运动参数、迭代时间精度控制和指定输出的时间点等。其中对于输入土壤水分运动参数提供了用 RETC 估计土壤水分运动参数的模块。图表输出单元可按要求输出土壤水分特征曲线、指定时间土壤剖

面或指定深度不同时间的流量、水头、含水量、浓度、温度等信息。Position 模块可以对建立的工程进行管理。profile 模块对流动区域进行几何描述、给定区域的土壤属性、分层属性，指定观察点等，并可反映反映输入的边界条件和初始条件。

（二） 模型中所用的数学模型

水流运动的控制方程为一维垂向饱和-非饱和土壤中水分运动方程（Richards 方程）描述，即

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left[K(\frac{\partial h}{\partial z}-1)\right]-S \tag{6.6.1}$$

式中：θ 为土壤体积含水率；h 为土壤水分负压；垂直坐标 z 向下为正；t 是时间；S 为根系吸水项或其他源汇项；K 为土壤非饱和水力传导度。

土壤的水分运动参数主要包括土壤水分特征曲线参数和非饱和土壤水力传导度。在软件的前处理环节提供了土壤水分运动参数模型的选择功能，可供选择的模型有：van Genuchten-Mualem 模型、Brooks and Corey 模型、Kosugi 模型、Dual-porosity/Dual-permeability 模型、look-up tables 模型。

边界条件包括给定水头边界、给定流量边界、考虑和不考虑径流的大气边界、自由和考虑地下水顶托的排水边界、渗出面边界等。初始条件可以给定剖面的土壤负压或含水率。其中对于分层土壤，初始条件只能给负压，因为层状土界面上含水量不连续，会造成迭代不收敛。

饱和-非饱和多孔介质中非稳定流溶质运移的一维对流-弥散方程为

$$\frac{\partial \theta c}{\partial t}+\frac{\partial \rho s}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\theta D\frac{\partial c}{\partial z}\right)-\frac{\partial qc}{\partial z}+\mu_w\theta c+\mu_s\rho s+\gamma_w\theta+\gamma_s\rho-Sc_s \tag{6.6.2}$$

式中：c 为土壤溶液中溶质浓度；s 为吸附在土壤颗粒上的固态溶质浓度；ρ 为土壤干容重；q 为流速；μ_w 和 μ_s 为液态和固态溶质的一阶反应速率常数；γ_w 和 γ_s 为液态和固态溶质的零阶反应速率常数；S 就是水流方程中的源汇项；c_s 是源汇项的溶质浓度；D 为饱和/非饱和水动力弥散系数。式中四个零阶和一阶速率常数表示了一系列的反应与转化过程，包括了生物降解、挥发、析出与放射性衰减等。

软件中可考虑水、汽、固三相的运移方程，并可计算温度和含水率对溶质运移的耦合影响系数。

热运移模型为

$$C_p(\theta)\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(\lambda(\theta)\frac{\partial T}{\partial z})-C_w q\frac{\partial T}{\partial z} \tag{6.6.3}$$

式中：T 为温度；$C_p(\theta)$ 和 C_w 多孔介质和液体的体积热容量；$\lambda(\theta)$ 为多孔介质的导热系数。

CO2 转化生成模型为

$$\frac{\partial c_T}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial z}(J_{da}+J_{dw}+J_{ca}+J_{cw})-Sc_w+P \tag{6.6.4}$$

式中：c_T 为 CO_2 总体积含量；J_{da}、J_{dw} 为气相和溶解后 CO_2 对流流量；J_{ca}、J_{cw} 为气相和溶解

后 CO_2 扩散流量。P 为 CO_2 生产速度；Sc_w 为根系吸收水中溶解的 CO_2。

模型中包含了离子及碳酸盐反应模型，主要包括八大离子及硅酸盐离子、CO2 溶水离子等化学反应、交换吸附等。

（三） 模型数值方法简介

水流方程、溶质方程和热量方程均采用伽辽金有限元法计算，其中处理的技巧与 SWMS 中的处理方法一致。反演计算中采用 Marquardt-Levenberg 最优化算法反求参数。

（四） 输入、输出

HYDRUS-1D 的输入界面是按提示一步一步计算：

（1）HYDRUS1D 主模块

按先后顺序依次输入以下信息：

1）主处理过程：选择可选的计算模块，其中水流模块是默认选项，可选项为溶质运移、热量运移计算、根系吸水、根系增长、二氧化碳运移、反演计算。

2）几何信息：输入长度单位、土壤种类、层数、倾角、模拟长度。

3）时间信息：时间单位、时间离散信息。

4）打印信息： 输入需要观察的时间点。

5）迭代信息：控制迭代精度。

6）土壤水分运动参数模型选择：选择需要的模型，是否考虑曲线滞后性等。

7）输入土壤水分运动参数值：可以手动输入或者用 RETC 模块模拟。

8）边界信息：上下边界种类。

9）溶质运移计算选项：时空离散格式、单位、模型、迭代控制等。若第一步没勾选溶质运移则无这一部分。

10）溶质运移参数：输入方程需要的参数。

11）溶质运移边界条件。

12）热量运移参数。若第一步没勾选热量运移则无这一部分。

13）热量运移边界条件。

14）根系吸水和吸收溶质模型：模型选择。

15）根系吸水和吸收溶质参数选择。

16）根系增长模型参数。

17）土壤剖面概要：土壤剖面的初始负压或含水率、土壤材料、根系分布等。

输入信息保存在安装目录：[\PC-Progress\HYDRUS-1D 4.xx\Examples\Direct\所求工程名]文件夹 ATMOSPH.IN（大气信息）和 SELECTOR.IN（输入信息）内。

（2）profile 模块

分别给出流动区域的几何信息，土壤性质、土壤分层几何参数，指定观察点等。在图中会反映 HYDRUS1D 主模块中输入的初始条件和边界条件信息。信息保存在上述文件夹的 PROFILE.DAT 文件内。

（3） 输出

保存在安装目录 ：[\PC-Progress\HYDRUS-1D 4.xx\Examples\Direct\所求工程名]，如果求解成功，文件夹内会有输入文件和输出文件。如剖面在各观察时间的含水量、负压、流量、水力传导度、温度、浓度等（NOD_INF.OUT）；各观察点在各时间的含水量、负压、流量、水力传导度、温度、浓度等（OBS_NODE.OUT）；边界和根系处的负压和流量（T_LEVEL.OUT）；迭代步长、时间、单次迭代次数记录（RUN_INF.OUT）；质量平衡变化信息（BALANCE.OUT）；溶质实际和累计流量（SOLUTE.OUT）；参数估计相关信息(FIT.OUT)；二氧化碳浓度和累计根系处及边界的流量(CO2_INF.OUT)；溶质浓度信息(CONC.OUT)；析出和吸附浓度(SOLID.OUT)；化学信息(EQUIL.OUT)；边界及根系处负压和累积流量（A_LEVEL.OUT）。

（五） 前处理与后处理

前处理对应输入信息、网格剖分等内容。建立一个新的项目后，按照输入界面的提示，一步一步输入所需的信息，软件根据输入的几何信息自动划分网格。

软件提供分类信息的二维图形和数据表等后处理功能，包括观测点信息、剖面信息、水流信息（边界水头、流量）、溶质运移信息（实际和累计边界溶质流量）、土壤水分运动含水量-负压曲线、计算时间信息、质量平衡信息、热量运移信息的二维图形和表格。

二、 HYDRUS2D 模型

（一） 模型基本情况介绍

HYDRUS 是由 J.Simunek，T.Vogel 和 M.Th.van Genuchten 等开发的基于 Windows 接口的饱和-非饱和多孔介质内二维或三维水、热、溶质流动有限元模拟分析模型，目前已包装成为商业软件的形式。HYDRUS 软件有 5 个不同的版本，包括 2D 标准版、2D 精简、基于 2D 发展而来的层状网格 3D 标准版、基于六面体网格的 3D 标准版及最新将要推出的一般网格的 3D 专业版。

一般认为，HYDRUS 软件包含了以下五大模块：①计算二维和三维流动的水、热和多种溶质流动的有限元计算模型 HYDRUS 模块；②拟合和优化多种土壤水动力学参数和溶质运移参数的 Rosetta 模块；③输入数据前处理的用户交互性接口 GUI 模块；④生成规则和不规则有限元网格的 MeshGen-2D 模块；⑤计算结果的图形演示 GRAPHICS 模块。

针对 HYDRUS 软件的改进主要集中在对于有限元计算模型 HYDRUS 模块的改进。HYDRUS 模型的发展具有很长的历史，历经了 UNSAT、SWMS_2D、CHAIN_2D、HYDRUS-2D（1.0）、HYDRUS-2D（2.0）等形式到最近的 HYDRUS（2D/3D），发展历史及相关的软件包见图 6.12。

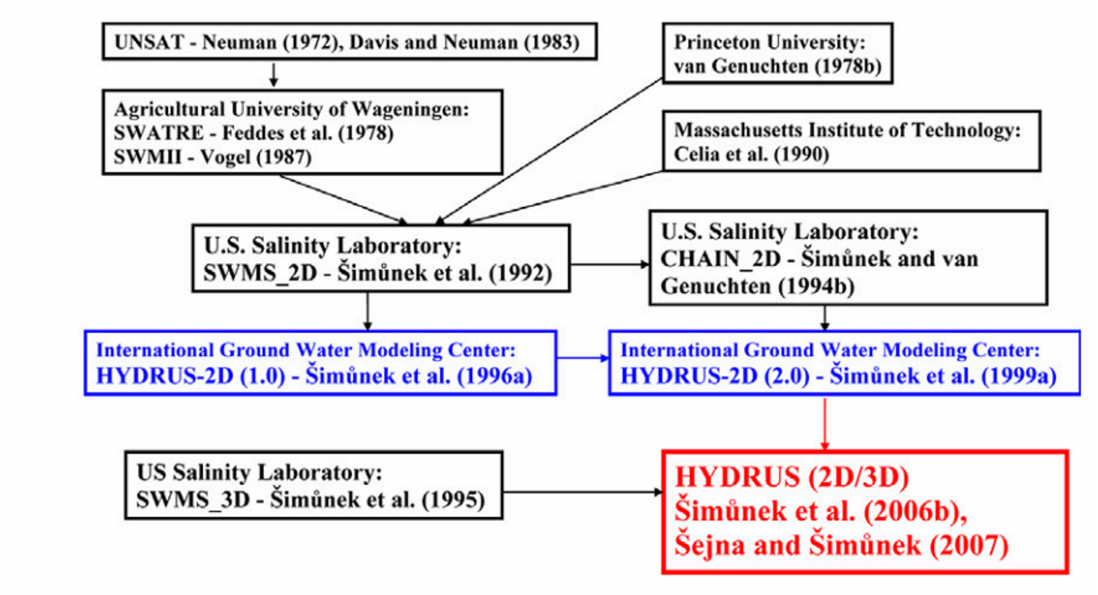


图 6.12　HYDRUS 软件的发展历史及相关的软件包（Simunek et al.，2008）

HYDRUS 软件的新的特性包括：①对多重多孔介质系统中的水流和溶质运移组块的添加，可以应用在孔隙或大孔隙中的优先流模拟；②补偿根系吸水模拟的应用；③根系分布的空间函数的应用（Vrugt et al.，2001）；④新的两个非饱和土壤水动力学模型的应用（Kosugi，1996；Durner，1994）；⑤运用吸附-非吸附模型、过滤理论的病毒、胶体及细菌等的运移模拟应用；⑥潜流动结构化湿地模型(Langergraber and Simunek, 2005)；⑦动态的、系统依赖性的边界条件转化等。新加入的一个重要功能组块是模拟生物化学转化和分解过程的潜流动结构化湿地模型(Langergraber and Simunek, 2005)，主要考虑了三种类别的有机成分、四种形态的氮、非有机质形态的磷、厌氧性和耐氧性微生物及溶解氧等的生物化学转化分解过程，主要是针对目前日益增多的湿地设计。

HYDRUS 软件在发展中相当的注重应用和推广，并整理出刊了 3 本 HYDRUS 的研究应用进展书册。软件的应用领域也十分广阔，覆盖了农业和非农业的众多领域。软件在农业中的应用涵盖了灌溉管理、喷滴灌的设计、排水沟设计、盐分淋洗等防治盐渍化管理、杀虫剂的运动模拟等；在非农业中的应用包括了垃圾填埋场的深层渗漏、核储藏地的邻部水体流动、垃圾填埋场的植物覆盖、垃圾填埋场导致的污染带的风险性分析、隧洞设计等对于埋设物体的流动分析、高速公路的路基渗漏分析、非均匀介质的随机分析、浅地下水的环境影响分析等。在个人计算机上安装的软件附带了部分的应用实例，同时还可以到软件的介绍主页 http://www.pc-progress.com 上找到其他实用的例子和免费下载。

（二）　模型中所用的数学模型

HYDRUS 软件中的 HYDRUS 模型包含了模型应用的数学模型。非饱和带多孔介质中水分流动和溶质运移采用了 Richards 方程和对流-弥散方程：

$$\frac{\partial \theta(h)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[K(h)\left(K_{ij}^A \frac{\partial h}{\partial x_j} + K_{iz}^A\right)\right] - s^*(h) \tag{6.6.5}$$

$$\frac{\partial \rho_b \bar{c}}{\partial t}+\frac{\partial \theta c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\theta D_{ij}\frac{\partial c}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial (q_i c)}{\partial x_i}-\phi-r_a(c,h) \tag{6.6.6}$$

在 Richard 方程（6.6.5）中，θ、h、K 分别为土壤体积含水量、负压水头项及非饱和水力传导度；K_{ij}^A 为无因子各向异性张量；x_i 为空间坐标系；t 为时间项；s^* 为源汇项，代表了因为植物吸水引起的体积含水量的减少。在 CDE 方程（6.6.6）中，ρ_b 是容重值，$\bar{c}$ 和 c 分别为固相和液相中的溶质浓度，D_{ij} 为弥散系数的分量；q_i 为体积流动通量；ϕ 是由于源汇项或者吸附等造成的单位体积溶质通量变化；r_a 代表了根系溶质吸收项。根系吸收项考虑了土壤负压水头对于根系吸水的影响函数，在由潜在蒸腾速率计算实际蒸腾速率的过程采用了 Feddes 函数（Feddes，1978）。

在溶质控制方程的求解中，假定了溶质存在于固相、液相和气相等三个形态中且吸附和解吸过程在每种介质相中都互不相同。存在于固相与液相间的交互作用可以被非线性不平衡的模式描述，存在于液相与气相间的交互作用被假定为线性和瞬态的。模型还进一步的假定了溶质在液相时同时受对流—弥散作用控制，在气相只由弥散作用控制。目前，HYDRUS 软件可以考虑多达 15 种溶质参与到各种反应式中。图 6.13 给出了三种溶质的一阶消解反应式的图示（J.Simunek and van Genuchten，1995），并利用 c、s、g 代表了溶质的液相、固相和气相；s、w、g 代表液相、固相和气相；γ、μ 等代表了零阶和一阶的反应速率；k_g、k_s 代表了不同相之间平衡常数。

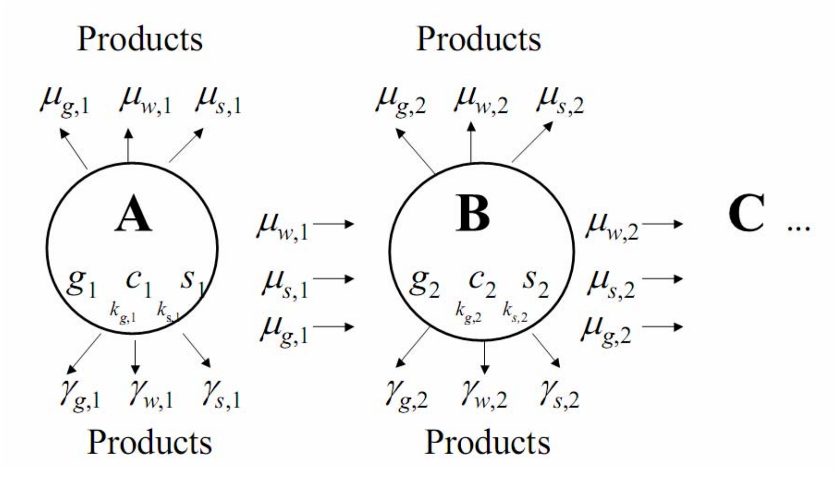


图 6.13 三种溶质间的一阶消解反应图

HYDRUS 还可根据各种土壤水力参数与溶质参数在 2D 情况下的多个观测的数据进行反演估计。对于土壤含水率或负压水头数据，采用了 Marquardt_Levenberg 非线性最优化技术估算土壤水分特征曲线中的经验参数；对于持水率或导水率数据，采用了将择优参数通过罚函数约束在某个可行区域（贝叶斯估计）中的方法来寻求最优。

（三） 模型数值方法简介

HYDRUS 能够处理由不规则边界包围的运动区域的问题。流动可以由任意角度的各向异性的非均质土壤组成。流动和运移何以发生在垂直、水平、轴对称的三维或者任意的三维区域。HYDRUS 软件的数值方法沿用了 SWMS-2D 中的数值求解方法，但是在最新的 HYDRUS（2D/3D）软件的有限元网格构建上做了一些改进。目前的有限元网格构建方法为，将二维流动区域的问题划分为四边形或者三角形单元；将三维问题划分为四面体，六面体或者三棱柱体的有限单元。这部分过程在软件的模拟区域定义及网格剖分中可以自动完成。

在实际模拟过程中选择的计算区域会面临着各种各样的边界类型，准确地甄别边界条件的类型并以合适的数量关系式描述边界上的水力特征往往会关系着模拟的成败。一般的边界条件可以分为三类基本的边界条件：已知水头的一类边界，已知通量的二类边界和已知通量梯度的三类边界。HYDRUS 软件中从实际出发，给出了定水头/流量、变水头/流量、大气边界、渗出面边界、排水管边界、自由排水边界、深度排水边界和隔水边界等多种边界处理水流运动，但是在溶质边界中还是采用了三种基本的边界。

在 HYDRUS 软件的计算中，按照一定的判断条件，将实际存在的水流边界处理成三类基本的边界条件。模型对于提出的大气边界，一般边界上的流量既由外部条件控制又受到土壤的湿润程度的影响，因此可能在已知流量边界和已知水头边界之间来回切换；渗出面边界则采用了假定沿着渗出面的压力水头始终等于 0，此外还假定通过渗出面离开饱和区域的水流立即以地面径流等形式流走；与渗流面相似，模型假定只要排水管位于饱和区域中，沿着排水管的压力水头值将等于 0，此时排水管起着压力水头汇的作用，而在非饱和区域中时则认为其为流量为零的已知流量边界。

HYDRUS 软件的控制方程的求解采用了三角网格剖分的 Gelarkin 有限元法。根据计算的规模，决定是采用直接解法还是迭代解法来求解离散化控制方程之后形成的矩阵方程。对于计算规模比较小的矩阵采用 Gaussian 消元法，对于大型对称矩阵采用共轭梯度法求解，对于大型的不对称矩阵方程则用 ORTHOMIN 算法求解。另外在数值求解过程中根据求解效率设计了自动调整措施，分别为采用迎风加权格式来减小溶质方程求解的数值振荡、在计算过程中用网格 Peclet 数和 Courant 数控制时间步长、在弥散系数中加入了人工弥散因子、采用保守质量法来处理含水量项。

（四） 模型数据的输入输出

HYDRUS 软件通过基于 Windows 的 GUI 界面管理输入输出文件、网格设计和编辑、参数输入和结果的演示。用户在软件的使用时通过选择模型的模拟过程、模拟中采用的单位、模拟区域几何类别、模拟时间属性、模拟土壤的水动力参数和溶质参数等可以输入模拟所需要的基本信息；随后需要调用软件的 GUI 模块中的 GEOMETRY 绘制水流区域，然后采用 MESHGEN-2D 模块生成适宜的网格；最后用户还需要通过 GUI 模块中的 BOUNDARY 来给定特定情况下的初始和边界条件，以及取定观测点；通过一定时间的计算，可以得到模拟所需要的结果。在 HYDRUS 软件中另外一个工具是 Rosetta 模型，也可以利用也已知土壤的物理特性等拟合出土壤的水力参数，便于模拟参数输入。

HYDRUS 软件的数据输出包含了整个区域的 2D 等值线图、正交坐标系下的水头、含水量、

流速、溶质浓度和温度等的时间变化图、多种变量在不同时刻动画演示和选定边界条件下的水流通量或者累积流量等。一些选定的观察点的输出数据也可以在软件的结果演示中方便地得到。另外，用户还可以通过软件运行过程中生成的 Input 和 Output 文件来获得更多的输入输出数据，并进行结果的后续处理。

三、 SWMS 模型

（一） 模型基本情况简介

SWMS_2D 是一个可用来分析计算饱和/非饱和介质中的二维水流运动和溶质运移的计算机模型，由 Šimůnek 和 van Genuchten 等人在 SWMII 模型(Vogel, 1988)的基础上开发而成。作者同时还开发了用于三维水流运动和溶质运移的软件包，对应地称为 SWMS_3D。SWMS_2D 的最终版本为 1.2 版，之后作者停止了代码的更新。

美国盐土实验室通过 CD 和网络等方式免费提供 SWMS_2D 软件包，该软件包的源代码以 Fortran77 语言编写，可以自由拷贝和使用。

除了能模拟水平面或者垂直剖面的二维水分运动，SWMS_2D 还能计算轴线对称形式的三维水分运动和溶质运移，最简单的例子就是流向抽水井的水分运动，还有通过表面环状或圆盘状的张力渗透计的渗透试验、地表滴灌或地下滴灌等情况。SWMS_2D 能计算的水流状态可以是完全饱和、部分饱和或者非饱和的达西水流，不计入空气对土壤水流运动的影响，水流控制方程采用混合型的 Richards 方程，代表作物因素的根系吸水量作为源汇项加入到控制方程中。溶质运移部分采用对流弥散微分方程，且考虑了介质对溶质的吸附，以及溶质的零阶和一阶生成/衰减过程。

SWMS_2D 程序可以灵活处理各类水流边界，包括定水头和变水头边界、定流量边界、蒸发入渗边界、自由排水边界、渗出面边界以及排水沟边界等，溶质运移部分的边界则根据情况设定为三类边界条件。计算区域的边界形状可以是不规则，区域中的介质可以是各向异性的，各个计算单元可以有任意的各向异性角度。

SWMS_2D 软件包在全球范围的科研工作者中间得到了广泛的应用。作者在自己的网站上给出了一个清单，上面列出了大量使用 SWMS_2D 进行科学研究的文献，模型应用到了包括农业、环境、水资源、水文地质等众多的领域，包括各种灌溉排水方案的模拟、农田作物根系土壤的最优化水分管理、施用到农业土壤的各种化学物质的传输运移、地下水污染等方面。

（二） 模型中所用的数学模型

过去数十年的研究多数都分别采用 Richards 方程和以 Fick 定律为基础的对流-弥散方程作为土壤水分运动和溶质运移的基本控制方程。SWMS_2D 仍是以这两个基本方程为基础，分别构造了水分运动和溶质运移两大模块。

水分运动部分，以土壤体积含水率θ 和负压 h 为未知量的混合 Richards 方程可以写成如下形式：

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[K(K_{ij}^A\frac{\partial h}{\partial x_j}+K_{iz}^A)\right]-S \qquad (6.6.7)$$

式中：θ 为土壤体积含水率；h 为土壤负压；S 为根系吸水项；K_{ij}^A 为各向异性张量 K^A 的分量；K 是非饱和土壤水力传导度。

式（6.6.7）中含水率 θ、土壤水力传导度 K 和土壤负压 h 的关系通常由试验资料合成经验公式来表示它们之间的关系。SWMS_2D 目前用 van Genuchten 改进模型来表示它们之间关系。式中的根系吸水项 S 作为土壤负压 h 的函数，采用 Feddes 等人定义的公式：

$$S=\alpha(h)S_p \qquad (6.6.8)$$

式中：$\alpha(h)$ 表示土壤负压水头（或土壤含水率）对根系吸水的影响函数（$0\le a\le 1$）。

溶质运移部分，二维对流-弥散方程如下：

$$\frac{\partial\theta c}{\partial t}+\frac{\partial\rho s}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\theta D_{ij}\frac{\partial c}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial q_i c}{\partial x_i}+\mu_w\theta\mathrm{c}+\mu_s\rho s+\gamma_w\theta+\gamma_s\rho-Sc_s \qquad (6.6.9)$$

式中：c 为土壤溶液中溶质浓度；s 为吸附在土壤颗粒上的固态溶质浓度；ρ 为土壤干容重；q_i 为在 x_i 向的达西流速；μ_w 和 μ_s 为液态和固态溶质的一阶反应速率常数；γ_w 和 γ_s 为液态和固态溶质的零阶反应速率常数；S 就是水流方程（2.14）中的作物根系吸水项；c_s 是根系吸水项的溶质浓度；D_{ij} 为饱和/非饱和水动力弥散系数。

溶液中溶质浓度 c 和土壤颗粒上吸附的溶质浓度 s 之间必须建立一定的关系式，SWMS_2D 采用平衡吸附的线性模型的形式，如下式：

$$s=kc \qquad (6.6.10)$$

式中：k 为土壤颗粒对溶质的经验吸附系数。

饱和/非饱和水动力弥散系数 D_{ij} 为一个张量，可以计算如下：

$$\theta D_{ij}=D_T|q|\delta_{ij}+(D_L-D_T)\frac{q_iq_j}{|q|}+\theta D_d\tau\delta_{ij} \qquad (6.6.11)$$

式中：D_d 为离子或分子在静水中的扩散系数；τ 为土壤孔隙的曲率因子；$|\mathrm{q}|$ 是达西流速的模；δ_{ij} 为 Kronecker delta 函数；D_L 和 D_T 分别为纵向和横向的弥散度。

（三） 模型数值方法简介

SWMS_2D 的用户需要将计算区域剖分成有限个四边形或三角形单元组合的网格系统，将每个单元顶点作为计算节点按逆时针进行编号。SWMS_2D 会自动将四边形处理成两个三角形单元。在网格系统剖分上，SWMS_2D 采用适用性较好的迦辽金有限元法对两个控制方程进行时间和空间上的数值离散，整理形成代数方程组后求解。水流运动部分在时间的离散上采用隐式差分格式，溶质运移部分则可由用户自定义时间差分格式。SWMS_2D 在水流模块中的 Richards 方程的迭代求解过程中，依据水流区域中第一次迭代时负压水头的变化来实时调整第二次和后续的迭代计算，从而显著地提高了在水流运动方面的计算速度和效率，而在 20 世纪 90 年代中期，模型计算效率仍是科学研究数值计算方面的一个主要热门问题。

所有的非稳定水流的水流方程都是随着模拟时间的增加继续求解，直到达到预先指定的时间点为止。稳定流的水流方程则可一样求解，即在同一时间点上迭代计算，直到两个相邻解之间的差小于预定误差为止。不过 SWMS_2D 使用一种更快的方法获得稳定流的解，那就是在第一个时间点的迭代过程中，在形成矩阵方程时将 Richards 方程的时间微分项系数直接置为 0，而获得稳定状态的解，此后随着时间的增加，对稳定流不再进行水流方程的计算，而只进行溶质方程的计算，并且没有时间加权因子的差别，即全部在当前时间点计算。

在溶质的对流弥散方程中，由于对流项的存在和离散过程中截断误差的影响，对流弥散方程的数值解法常常遇到两个困难，即数值跳动（过量）和数值弥散，尤其是在对流起主要作用的时候。SWMS_2D 提供三种减少数值跳动和数值弥散的方法供选择，分别为采用迎风加权格式、在计算过程中用网格 Peclet 数和 Courant 数控制时间步长以及在弥散系数中加入人工弥散因子。三种方法中取其一，具体采用哪种方法可以由用户自由指定。

SWMS_2D 的最初版本中使用 Gaussian 消去法求解由基本微分方程离散所得到的代数方程组，这样能充分利用了水流运动的代数方程组中系数矩阵的带宽性质和对称性质。但相对于迭代解法而言，直接解法有着诸多的弊端，因此后续版本的 SWMS_2D 中增加了迭代解法，该迭代解法取自于 Mendoza 等人开发的 ORTHOFEM 软件包。SWMS_2D 会根据计算的规模来决定是采用直接解法还是迭代解法来求解代数方程组，对于规模小的代数方程组采用高斯消元法求解，对于大型的对称的代数方程用共轭梯度法求解，对于大型的不对称的矩阵方程则用 ORTHOMIN 算法求解。

（四） 输入、输出

SWMS_2D 的所有输入数据都包含在三个以“.IN”作为后缀名的输入文件中。输入文件中必须首先统一质量、长度、时间这三个基本量纲。所有的输入数据根据性质不同被区分成从 BLOCK A 到 BLOCK K 的 11 个数据组，程序运行时根据需要读取其中的几组数据。输入数据分类列表如下：

表 6.1 输入的数据列表

输入文件	包括的数据组
SELECTOR.IN	BLOCK A. 基本信息
	BLOCK B. 土壤信息
	BLOCK C. 时间信息

	BLOCK D. 根系吸水信息
	BLOCK E. 渗流面信息
	BLOCK F. 排水管信息
	BLOCK G. 溶质运移信息
GRID.IN	BLOCK H. 节点信息 BLOCK I. 单元信息 BLOCK J. 边界几何信息
ATMOSPH.IN	BLOCK K. 大气信息

SWMS_2D 将所有的输出文件都存放在 SWMS_2D.OUT 文件夹中。SWMS_2D 最多存在 16 个输出文件，按数据内容可以分为三种类型，列表如下：

表 6.2　输出文件列表

输出文件名	描述
H_MEAN.OUT	同一类型节点的压力水头平均值
V_MEAN.OUT	同一类型节点的流速/通量和流量总和
CUM_Q.OUT	同一类型节点的流量总和的累积值
RUN_INF.OUT	程序的运行信息
SOLUTE.OUT	同一类型节点的溶质流量总和、溶质流量总和的累积值
OBSNOD.OUT	设定的观测点信息
H.OUT	所有节点上的压力水头值
TH.OUT	所有节点上的体积含水率值
CONC.OUT	所有节点上的溶质浓度值
Q.OUT	所有节点对应的离开/进入计算区域的流量
VX.OUT	所有节点对应的达西流速在 x 坐标方向上的分量
VZ.OUT	所有节点对应的达西流速在 z 坐标方向上的分量
BOUNDARY.OUT	所有边界节点（包括内部源汇点，不包括隔水边界上的节点）对应的相关信息
BALANCE.OUT	指定土壤分区的水流和溶质的质量平衡信息
A_LEVEL.OUT	大气边界和变流量/水头边界的压力水头平均值和流量总和的累积值
CHECK.OUT	程序输入基本参数的信息，用于运行核对。 只在指定逻辑变量 *CheckF* 为真时才输出

四、　FEFlOW 模型

（一）　模型基本情况简介

FEFLOW (Finite Element subsurface FLOW system)有限元地下水流模拟系统是 DHI-WASY GmbH（德国水文研究所下属 WASY 水资源规划与系统研究所）研发的一种模拟地下水水流、污染物和热传输过程的交互式图形有限元模拟系统。FEFLOW 自 1979 年始创以来不断改进发展，是迄今为止功能最为齐全的地下水模拟软件包之一。

FEFLOW 是一种交互式、全图形导向和菜单显示分层结构的软件系统，它包括用于网格（几何属性）设计的网格编辑器（Mesh Editor）、区域离散化网格生成的网格生成器（Mesh Generator）、用于模型所有非几何属性编辑的问题编辑器（Problem Editor）、进行模拟计算的模拟器核心程序（Simulator Run）以及用于研究和评价计算结果的后处理器（Postprocessor）。另外，通过界面管

理器（IFM-Interface Manager）可提供外部程序与 FEFLOW 的联接（二次开发），提供选项（Options）和辅助工具（Tools）进一步增强了 FEFLOW 的应用。

分层结构如图 6.14 所示。

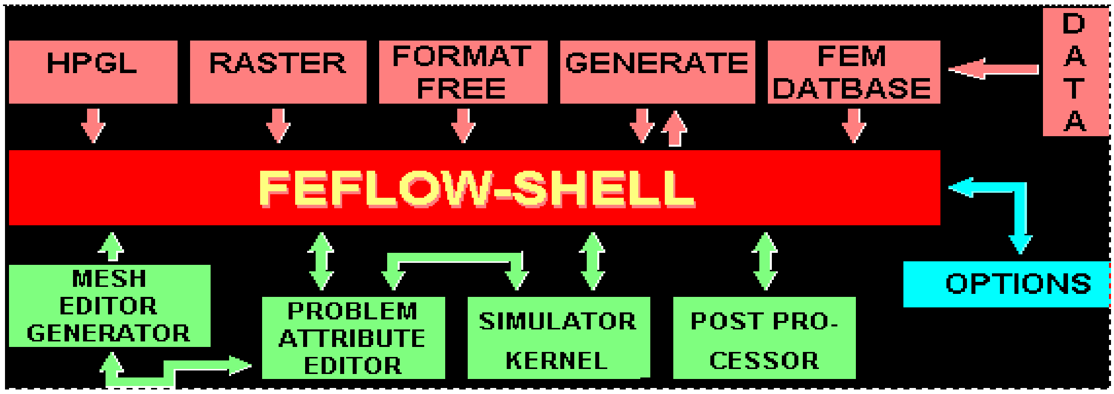


图 6.14　FEFLOW 的总体结构

FEFLOW 具有比较齐全的地下水模拟功能，适用于不包含自由水面以及一个或许多个自由水面（包括滞水模拟）的地下水系统，包括：二维和三维模拟；二维平面以及二维剖面（水平、垂直以及轴对称）模拟；可变密度流场以及热盐流（污染物质和温度场引起流体密度差异）模拟；饱和以及非饱和模拟；稳定流和非稳定流模拟；水流、溶质以及热运移模拟；多种溶质之间反应的模拟等。

FEFLOW 可用于研究污染物或者热场的时空分布；分析水动力学特性和渗流；估算污染物质的历时和传播时间；规划和设计地下水污染补救策略和遏制方法；帮助制定选择方案与有效地监测计划。

FEFLOW 的应用领域有：模拟地下水区域流场及地下水资源和管理方案；模拟矿区露天开采及地下开采对区域地下水的影响及其最优对策方案；模拟由于近海岸区抽取地下水或者矿区抽排地下水引起的海水或深部盐水入侵问题；模拟饱和带以及非饱和带地下水流及温度场分布问题；模拟污染物在地下水中迁移过程及其时空分布模式（分析和评价工业和城市废弃物存放地对地下水资源和生态环境的影响，研究最优治理方案和防护对策）；结合降雨-径流模型联合动态模拟“降雨-径流-地下水”水资源系统（分析水资源系统各组成部分之间的相互依赖关系，研究水资源合理利用、监理以及生态环境保护方案等）

（二）　模型中所用的数学模型

FEFLOW 利用二维和三维的有限元方法（FEM），求解描述以下相互依赖过程的基本偏微分方程：地下水水流动力学过程（包括可变密度流以及多种自由表面类型）；变饱和水流传输；污染物对流弥散运移（可考虑化学物质的吸附作用、水动力运移以及化学反应的影响；地热传导过程（可考虑温盐流——污染物质浓度和温度场两者引起流体密度的影响）

基本方程如下：

$$S_0\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q_i^f}{\partial x_i}=Q_\rho+Q_{EB}(C,\ T) \tag{6.6.12}$$

$$q_i^f = -K_{ij} f_\mu \left(\frac{\partial h}{\partial x_j} + \frac{\rho^f - \rho_0^f}{\rho_0^f} e_j \right) \tag{6.6.13}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon RC) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(q_i^f C - D_{ij} \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) + \varepsilon R \vartheta C = Q_C && \text{divergence form} \\ &\varepsilon R_d \frac{\partial C}{\partial t} + q_i^f \frac{\partial C}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{ij} \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) + (\varepsilon R \vartheta + Q_\rho) C = Q_C && \text{convective form} \end{aligned}\right\} \tag{6.6.14}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\varepsilon \rho^f c^f + (1-\varepsilon) \rho^s c^s \right) T \right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho^f q_i^f c^f T \right) \\ &-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = Q_T \qquad \textit{divergence form} \\ &\left[\varepsilon \rho^f c^f + (1-\varepsilon) \rho^s c^s \right] \frac{\partial T}{\partial t} + \rho^f c^f q_i^f \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \\ &+\rho^f c^f Q_\rho (T - T_0) = Q_T \qquad \text{convective form} \end{aligned}\right\} \tag{6.6.15}$$

通过以上方程对四个基本变量求解，可得到水头 h，达西流速 q_i^f，溶质浓度 c，流体温度 T。

（三） 模型数值方法简介

FEFLOW 采用迦辽金法为基础的有限单元法求解，内部配备了若干的数值求解方法来控制和优化求解过程：

1) 直接求解法（适用于简单模型），如 RCM 和 MLNDS；

2) 交互式求解，如 PCG（默认）、SAMG 求解对称性方程，ORTHOMIN、GMERS、CGS、BiCGSTAB、BiCGSTABP 以及 SAMG 求解非对称型方程；

3) 灵活多变的上风技术，如 Streamline upwinding、Full upwinding、Shock capturing、Least square upwinding 减少数值振荡；

4) 为非饱和模拟提供多种参数模型，如 Van Genuchten、Brooks-Corey、VG modified、指数模型、线性模型和多种形式的 Richard 方程；

5) BASD（Best-Adaptation-to-Stratigraphic-Data，地层数据最佳适线法）技术处理有自由水面的含水系统以及非饱和带的模拟；

6) 并行计算（Parallel computing）。

（四） 输入和输出

（1）输入

通过标准数据输入接口，用户既能直接利用已有的GIS空间图形数据生成有限单元网格，也

可以手动调整网格几何形状，加密或减稀网格。在建立地下水水流模型时用户可以对边界条件增加特定的限制条件，以避免异常解的出现。所有模型参数、边界条件及附加条件既可设置为常数，也可定义为随时间变化的函数。FEFLOW提供克里金(Kriging)，阿基玛(Akima)和距离反比加权法(IDW)等插值方法。输入数据格式既可以是ASCII码文件，也可以是GIS地理信息系统文件。

（2）输出

FEFLOW提供了丰富实用的图形显示和数据结果分析工具。其先进的图形可视化及数据分析技术表现在：

1) 有限单元网格、边界条件和模型参数的三维可视化、三维彩色等势面显示以及二维平面彩色或等值线显示；
2) 三维地下水流线追踪,流动时间及流速动画显示；
3) 三维交叉断面图、剖面图与切片图显示；
4) 三维图形的交互旋转、放大或缩小；
5) 模型整体和局部水量均衡分析（包括任意几何多边形内的水流通量分析）；
6) 各种边界条件上的水流通量、物质通量以及在特定时间、空间内的水流积分量都可以由模型算出并以图形显示出来。

五、 NPTTM 模型

氮磷运移转化模型 NPTTM 是在氮素运移转化模型 Nitrogen-2D 的基础上发展起来的。Nitrogen-2D 模型是由杨金忠、陆垂裕等（2004 年）建立的二维氮素运移转化数值模型，可模拟饱和-非饱和土壤中水分和氮素运移转化过程。杨金忠、王丽影等（2007 年）在 Nitrogen-2D 模型的基础上加入了磷素转化模块、磷素运移模块、作物生长模块和施肥模块，将其发展成二维氮磷运移转化数值模型，即 NPTTM 模型。

NPTTM 模型可模拟饱和-非饱和条件下土壤水分运动、氮素运移转化过程（包括矿化、吸附、硝化、反硝化、挥发等过程）、磷素运移转化过程（包括新鲜有机磷的矿化、腐殖质磷的矿化、非稳定磷的固定和非稳定磷向活性磷的转化）。该模型主要由七个部分组成：土壤水分运动模型、氮素运移模型、氮素转化模型、磷素运移模型、磷素转化模型、作物生长模型、施肥模型。

目前，NPTTM 数值模型已成功运用于各种条件下氮素、磷素运移转化数值模拟及预测。杨金忠、陆垂裕（2004 年）将其应用于 FILTER 系统（Filtration and Irrigated cropping for Land Treatment and Effluent Reuse）土壤氮素运移转化数值模拟及预测分析；杨金忠、王丽影（2007 年）将其应用于田间尺度冬小麦污水灌溉条件下氮素运移转化数值模拟；杨金忠、王丽影（2007 年）将其应用于田间尺度夏玉米污水灌溉条件下氮素、磷素数值模拟。NPTTM 模型经过不断运用和改进，已发展为一个较为完善的模拟饱和非饱和系统中氮素、磷素运移转化的二维数值模型。

（一） NPTTM 模型原理简介

水分运动用二维饱和-非饱和土壤水分运动方程（Richards 方程）描述：

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[K(K_{ij}^A\frac{\partial h}{\partial x_j}+K_{iz}^A)\right]-S \qquad (6.6.16)$$

式中：θ为土壤体积含水率；h为土壤水分负压；S为根系吸水项或其他源汇项；$x_i(i=1,2)$为空间坐标，当研究垂直截面的平面流时，$x_1=x$为横坐标，$x_2=z$为垂直坐标，且取向上为正；t是时间；K_{ij}^A为各项异性无量纲张量的分量；K是非饱和水力传导度。

饱和-非饱和条件下土壤中氮素、磷素的运移模型根据二维对流-弥散方程描述：

$$\frac{\partial\theta C}{\partial t}+\frac{\partial\rho s}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j})-\frac{\partial q_i C}{\partial x_i}+R \qquad (6.6.17)$$

式中：C 为土壤溶液中溶质浓度；θD_{ij}为饱和/非饱和水动力弥散系数；s为吸附在土壤颗粒上的溶质浓度，本节采用等温吸附模型的形式，即$s=K_dC$ ；ρ为土壤干容重；K_d为土壤对该溶质的吸附系数；R为该溶质各种源汇项之和，不同的溶质其对流弥散方程的主要差别在于源汇项的不同，铵态氮运移方程的源汇项主要包括铵态氮的矿化/固持项、铵态氮的硝化项、铵态氮的根系吸收项和铵态氮的挥发项；硝态氮运移方程的源汇项则包括硝态氮的固持项、铵态氮的硝化项、硝态氮的反硝化项和根系对硝态氮的吸收项；磷运移方程源汇项主要为新鲜有机磷的矿化速率项、腐殖质磷的矿化速率项、非稳定磷的固定速率项和非稳定磷向活性磷的转化速率项。

（二） 模型数值方法

水流模型和溶质运移模型均采用迦辽金有限单元法进行空间离散，对时间的微分采用有限差分代替。对于饱和非饱和水流方程时间离散采用隐式差分格式；而溶质运移方程时间离散采用两层差分格式。

控制方程离散后形成的矩阵方程的数值求解方法则根据计算规模的不同，选用不同的标准算法进行求解：对于带状的矩阵方程用高斯消元法求解；对于对称的矩阵方程用共轭梯度法求解；对于不对称的矩阵方程则用 ORTHOMIN 算法求解。

（三） 数值模型简介及模型应用

（1）数值模型简介

NPTTM 数值模型包括一个主程序和 120 个子程序，相应形成 13 个源文件包，可单独编辑、编译并通过主程序连接形成可执行文件。程序流程见图 6.15。

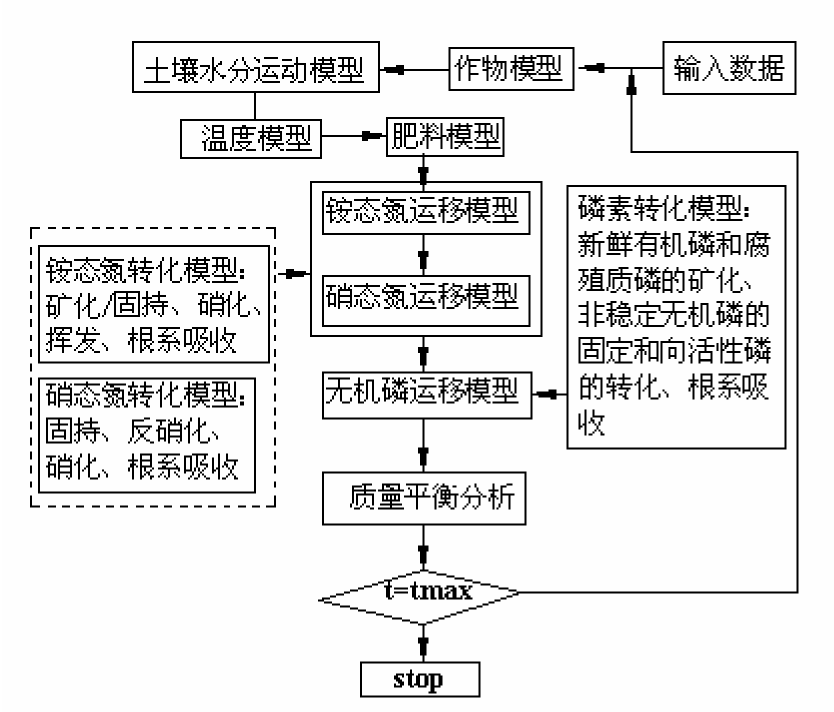


图 6.15　　NPTTM 模型程序流程图

NPTTM 模型适用范围较广，处理的边界可为非规则边界，模拟区域介质可为各向异性，可模拟平面二维及轴对称形式三维的水分和氮磷运移转化，模型可处理一类、二类边界条件及各类混合边界条件。模型处理的各种问题见图 6.16。

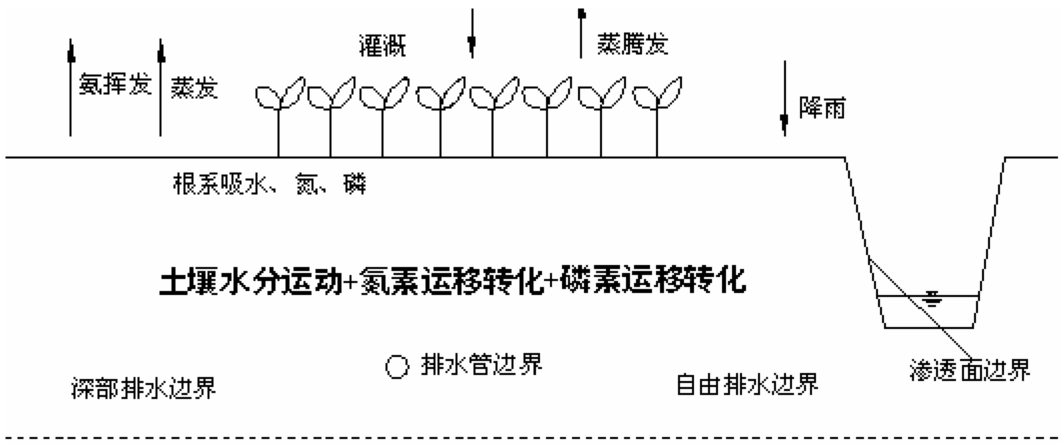


图 6.16　NPTTM 模型示意图

（2）模型输入输出

NPTTM 模型的输入数据包含在 9 个以“.in”为后缀的输入文件中，输入文件放置在 Nitrogen.in 文件夹中，程序运行前需创建这些文件，除 Crop.in 和 Param.in 两个文件中输入为默认值外，其他均需手动建立。

主要输入信息包括以下几个部分：Atmosph.in：大气边界条件信息；Crop1.in：作物生长信息；Fertilizer.in：施肥信息；Grid.in：节点信息，单元信息，边界信息；Initnt-NP.in：溶质运移初始条

件；Selector.in：基本信息，土壤信息，时间信息，根系吸水信息，溶质运移信息；TransfNP.in：氮素转化信息，磷素转化信息。

NPTTM 模型将所有的输出文件放置在 Nitrogen.out 文件夹中，程序运行前手动创建，与 Nitrogen.in 放置在同一文件夹中，NPTTM 最多可同时输出 34 个文件。主要输出文件及输出内容如下：H.out：压力水头节点值；Th.out：含水率的节点值；Conc.out：土壤溶液中铵态氮浓度的节点值；Conc3.out：土壤溶液中硝态氮浓度的节点值；ConcP.out：土壤溶液中速效磷浓度的节点值；Q.out：边界节点或内部源汇节点上的排水或补给流量；Vx.out：节点上达西流速的分量；Vz.out：节点上达西流速的分量；Obsnod.out：观测节点各时间步长内的土壤含水量、水头、溶质浓度；Boundary.out：Kode(n)≠0 的边界节点 n 的信息；Balance.out：指定分区的水流和溶质的总量、进出流量、平均压力水头、平均浓度以及水流和溶质的质量平衡计算的绝对、相对误差；Solute.out：铵态氮一阶、零阶转化累计量及边界通量累计值；Solute3.out：硝态氮一阶、零阶转化累计量及边界通量累计值；SoluteP.out：速效磷一阶、零阶转化累计量及边界通量累计值；LHplCum.out：各时间步长内模拟区域快速反应有机氮、快速反应有机碳、慢速反应有机氮的质量及变化量累计值；InorgCumP.out：各时间步长内模拟区域快速速效磷、活性磷、稳定态磷的质量及变化量累计值；OrgCumP.out：各时间步长内模拟区域快速反应有机磷、慢速反应有机磷的质量及变化量累计值；TransfN.out：各时间步长内氮素矿化、硝化、反硝化、挥发等转化量的累计值；Crop.out：以天为单位输出作物叶面积指数，生物量、根重、吸氮吸磷累积值等信息，还可输出作物产量。

（四） 模型前处理及后处理

模型前处理主要根据计算模型输入要求制作输入文件。应用 HYDRUS-2D 软件进行单元剖分，获取网格信息和单元节点信息；气象数据由中国气象局气象数据共享数据库中获得，建立大气边界条件；土壤剖面节点水分和溶质浓度分布则由实测数据进行差值计算获得；作物生长信息和施肥信息根据实际情况建立；氮素转化信息和磷素转化信息根据历史资料建立。

本模型可以根据需要输出大量数据结果，输出文件格式为“.txt”文件，输出内容包括不同时间点的水分和溶质浓度分布、氮素磷素转化过程、作物生长过程等，用户可以根据需要运用不同的软件对这些数据进行处理，如运用 Excel、Surfer、Tecplot 等软件对输出数据绘制成图。

第七章　地下水运动的随机模型

以往描述地下水运动的传统方法，是根据质量守恒定律来建立地下水运动的守恒方程，方程中包含有代表含水层导水特性的参数，而这些参数在空间上的分布是极其复杂的。由于天然土壤和含水层沉积过程的随机性，含水层的水文地质特征以及土壤的结构、构造和矿物组成等土壤特性具有明显的空间变异性。由此而引起的天然地质体的非均匀性可在各种不同尺度上反映出来。在采取的土样中，可以观测到土粒孔隙大小及团粒结构的差异；在大的区域含水层系统中，可以观测到不同含水层间以及同一含水层的不同地域间的变异性。对某一特定的含水层而言，其空间任一点含水层性质是确定的，如果我们可以得到空间上每一点的测量数据，那么含水层性质的空间分布是完全确定的。但在实际工作中，我们不可能得到空间每一点的资料，所得到的仅是其中一个样本，采样的点数对于介质的区域分布而言是相当少的，特别是对于区域问题，含水层的性质主要是通过水文地质勘探资料获得，对于每一口勘探井，所得到的资料仅是井点处或抽水实验可能影响范围内的含水层渗透性质的平均值，在研究区域内其余地方的含水层渗透性能，多数是在已有勘探实验点所取得参数值的基础上，通过一定的插值方法得到，这种插值或推断的误差的不确定性，必然对含水层中地下水或溶质的运动和分布的分析产生影响，导致分析结果的不确定性。除此之外，含水层边界分布的不确定性、边界条件的不确定性、对于含水层的补给和排泄认识的不确定性，必然导致对地下水运动认识的不确定性。因此，应用确定性方法处理非确定的地下水运动问题具有很大的局限，必须探讨新的理论和方法来研究此问题。

近年来国内外的研究成果表明，溶质在小尺度范围运移所确定的方程和弥散系数不能描述溶质在大区域范围内的运动特征和规律。实验室得到的小尺度弥散度值为 0.01~0.2m，在野外大区域所求得的弥散度值在 10^{-1}~10^{3}m 量级范围内（杨金忠等，1993；Gelhar,1992）。弥散度随着区域尺度的增大而增加，其原因是控制大区域溶质运移的机理是宏观地下水流速的不均匀性（杨金忠等，1994），而地下水流速度的不均匀性主要起源于储水介质沉积特征和水力特征的空间变异性，这些影响区域溶质运移的基本特征在室内实验中是反映不出来的。正如研究水动力弥散时分子扩散可以忽略一样，小范围测得的弥散度对大区域溶质的分散过程可以忽略不计。因而，微观的水动力弥散理论不能直接用于宏观的研究。

为了获得宏观范围内介质的非确定性特征，随机理论开始成为地下水研究的重要工具。大尺度范围内溶质运移理论研究的最主要内容是：大尺度范围内影响溶质运移的主要因素；控制大尺度范围内溶质运移的基本方程以及弥散系数的基本结构。由于不可能测得含水层每一点的介质特征和水力特征，引入含水层空间随机场的概念，将实际含水层视为随机场的一个实现。野外溶质运移试验表明 (Boggs et al.，1992；Mackay et al.，1986)，溶质运移的随机理论可以较好地描述区域溶质运动。

以上研究的基本出发点是将含水层水力参数视为随机场，随机场的空间结构通常是通过含水层部分试验结果而估计的，即随机场的分布是条件分布，将随机场限制在某些观测点上来描述水力参数的空间分布能吸收确定性方法和随机方法的优点。由随机场的条件分布而得到的浓度预测结果的变异性将随测量点的增加而减少。也就是说，如果观测点无限多，介质将是确定的，则预

测结果就没有随机性。若将随机场的条件分布结合到溶质运移的随机理论中将是减少预报误差的一个重要内容。

由任何理论推导的水流运动和溶质运移方程，其中都包含有描述介质水力特征和弥散特征的参数（如渗透系数、宏观弥散系数等），在进行污染物运移计算分析时，边界条件、入渗条件以及影响污染物运移的各因素都不能完全确定地给出，这样，地下水污染的预测预报结果将带有很大的不确定性，如何评价预测结果的可信度和污染物浓度超标的可能性，是地下水水质管理中面临的新课题。

第一节　多孔介质的空间变异性及其随机描述

通常通过稀疏分布的测井的抽水试验来获取含水层的水力参数，用这些局部观测所得到的参数代表整个含水层或一定区域上所有点的参数值，而往往忽视含水层的空间变异性。早期的田间试验尽量选用性质均一的小区或采用小区随机排列等方式，来消除土壤空间变异性对试验的影响。事实上这些做法存在局限性，缺乏对介质空间相关结构的描述，从而影响观测和试验的可靠性。

表征含水层水力特性的参数，如渗透系数、导水系数等，以及表征土壤水力特性的主要参数，如水力传导度、容水度等，由于介质的空间变异性，它们是空间位置的函数，随机理论为描述这种空间变化、确定相应的统计特征，提供了一条有效途径。

介质特性参数的空间变异性一般是由参数的统计特征与空间相关结构来描述，后者是根据参数的实测样本进行推求的。实际上，只能得到随机场 $U(\mathbf{x})$的一个实现，因此往往引入遍历性假设，该假设表明随机场 $U(\mathbf{x})$的统计结构可以从单个实现的空间平均代替集平均来进行推断。

一、　随机变量和空间随机函数

由于含水层岩性分布和地下水补给等条件的不确定性，某一固定空间点地下水位的高度在水位测量之前，我们无法确定其具体取值，但对其可能的取值范围预先可以估计得到。这样，地下水位可定义为随机变量。为理解随机变量的统计规律，还必须知道随机变量取某一确定的值或随机变量的取值落入某一区间的概率。连续型随机变量的分布函数 $F(u)$可表示随机变量的概率分布，即

$$F(u) = P[U \le u] \tag{7.1.1}$$

式中：U 表示随机变量；u 表示任意实数。式(7.1.1)右边表示事件 $U \leqslant u$ 发生的概率。分布函数 $F(u)$为一普通函数，这样就可以应用数学分析的方法研究随机变量。对于连续随机变量，其概率密度函数 $f(u)$定义为

$$f(u) = \frac{dF(u)}{du} \tag{7.1.2}$$

显然，累积分布函数可用概率密度函数表示，

$$F(u) = \int_{-\infty}^{u} f(u')du' \tag{7.1.3}$$

实践中最常遇到的随机变量是正态或高斯随机变量，其概率密度函数具有以下形式，

$$f(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],\quad -\infty<u<\infty \tag{7.1.4}$$

式中：μ为随机变量的均值；σ为标准差。

在地下水文学中，一些水文参数，如渗透系数、导水系数等常服从对数正态分布。随机变量 U 的函数 $V=\ln(U)$是一个正态分布随机变量，则 U 为对数正态分布，这时 U 的概率密度函数为

$$f(u)=\frac{1}{u\sqrt{2\pi}\sigma_V}\exp[-\frac{(\ln u-\mu_V)^2}{2\sigma_V^2}] \tag{7.1.5}$$

式中：μ_V 为随机变量 V 的均值；σ_V 为 V 的标准差。

在实际情况下，获得随机变量的概率密度函数非常困难而且不经济，最简单也最为常用的就是获取随机变量的统计矩。随机变量的均值或数学期望值和方差定义为

$$\langle U\rangle=E(U)=\int_{-\infty}^{\infty}uf(u)du \tag{7.1.6}$$

$$\sigma^2=\left\langle\left(U-\langle U\rangle\right)^2\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\left(u-\langle U\rangle\right)^2 f(u)du \tag{7.1.7}$$

方差表示随机变量在其均值附近的分散程度。

对于正态随机变量 $V=\ln U$，其均值为μ_V、方差为 σ_V^2，对于对数正态随机变量 U，其 n 阶原点矩为

$$\langle U^n\rangle=\exp\left[n\langle V\rangle+\frac{n^2}{2}\sigma_V^2\right] \tag{7.1.8}$$

U 的均值和方差可表示为

$$\mu_U=\exp\left[\mu_V+\frac{1}{2}\sigma_V^2\right] \tag{7.1.9}$$

$$\sigma_U^2=\exp\left[2\mu_V+\sigma_V^2\right]\left[\exp\left(\sigma_V^2\right)-1\right] \tag{7.1.10}$$

由以上两式可以得到 U 的变差系数为

$$CV_U=\frac{\sigma_U}{\mu_U}=\sqrt{\exp(\sigma_V^2)-1} \tag{7.1.11}$$

在地下水水文学、地下水动力学及其他相关学科中还经常遇到多个自变量的随机函数。如地下水水头 H 和地下水浓度 c，它们都随空间点 $\boldsymbol{x}$ 和时间 t 而变化的随机变量，成为随机函数或随机场，即 $H=H(\boldsymbol{x},t)$，$c=c(\boldsymbol{x},t)$。另外，任一点的地下水流速 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$，是以空间坐标 $\boldsymbol{x}$ 和时间 t 为自变量的向量随机函数，即向量随机场。当参数为时间变量时，通常称之为随机过程；当参数为空间

坐标时，通常称之为随机空间函数或随机场。

对于任一确定的空间坐标 **x**，$U(\mathbf{x})$为随机变量。为了描述随机场在不同位置间的相互关系，需要了解 n 个不同的空间点$\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots \mathrm{x}_n \in \Omega$所对应随机变量$U(\mathrm{x}_1), U(\mathrm{x}_2), \cdots U(\mathrm{x}_n)$之间的联合分布，

$$F(u_1, \mathrm{x}_1; u_2, \mathrm{x}_2; ..., u_n, \mathrm{x}_n) = P\left[U(\mathrm{x}_1) \le u_1, U(\mathrm{x}_2) \le u_2, ..., U(\mathrm{x}_n) \le u_n\right] \tag{7.1.12}$$

上式为随机过程 $U(\mathbf{x})$的 n 维累积分布函数。$U(\mathbf{x})$的 n 维概率密度函数定义为

$$f(u_1, x_1; u_2, x_2; ..., u_n, x_n) = \frac{\partial^n F(u_1, x_1; u_2, x_2; ..., u_n, x_n)}{\partial u_1 \partial u_2, ..., \partial u_n} \tag{7.1.13}$$

随机场的分布函数能完全刻划随机场的统计特性，但是在实际中根据观测往往只能得到随机场的部分资料(样本)，用来确定分布函数是困难的，甚至是不可能的。因而需要引入随机场的统计矩。与随机变量类似，定义随机场 $U(\mathbf{x})$的均值函数和方差函数为，

$$\begin{aligned} \langle U(\mathrm{x}) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} u f(u, \mathrm{x}) du \\ \sigma_U^2(\mathrm{x}) &= \left\langle \left[U(\mathrm{x}) - \langle U(\mathrm{x}) \rangle\right]^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left(u - \langle U(\mathrm{x}) \rangle\right)^2 f(u, \mathrm{x}) du \end{aligned} \tag{7.1.14}$$

它们描述了随机场的静态特征，但不能描述随机场在不同空间位置参数 $\boldsymbol{x}$ 之间的相互关系，自协方差函数（简称协方差函数）$C_U(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$是描述随机场 $U(\boldsymbol{x})$不同空间点 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 之间统计特征最重要的定量指标，$C_U(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$定义为

$$\begin{aligned} C_U(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) &= \left\langle \left[U(\mathrm{x}_1) - \langle U(\mathrm{x}_1) \rangle\right]\left[U(\mathrm{x}_2) - \langle U(\mathrm{x}_2) \rangle\right] \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[u_1 - \langle U(\mathrm{x}_1) \rangle\right]\left[u_2 - \langle U(\mathrm{x}_2) \rangle\right] f(u_1, \mathrm{x}_1; u_2, \mathrm{x}_2) du_1 du_2 \end{aligned} \tag{7.1.15}$$

当$\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2 = \mathrm{x}$时，自协方差函数即为随机函数在 $\boldsymbol{x}$ 点的方差函数$\sigma_U^2(\mathrm{x})$。

协方差可以用来表明两个随机变量 $U(\boldsymbol{x}_1)$和 $U(\boldsymbol{x}_2)$的相关程度。一般来说，正的协方差值表示当 $U(\boldsymbol{x}_1)$增大时，$U(\boldsymbol{x}_2)$也随之增大；负的协方差值表示当 $U(\boldsymbol{x}_1)$增大时，$U(\boldsymbol{x}_2)$会减小。

自相关系数（简称相关系数）定义为

$$\rho_U = \frac{C_U(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)}{\sigma_U(\mathrm{x}_1)\sigma_U(\mathrm{x}_2)} \tag{7.1.16}$$

相关系数取值区间为[-1，1]。当ρ=1 时，$U(\mathbf{x}_1)$和 $U(\mathbf{x}_2)$完全正相关；当ρ=－1 时，$U(\mathbf{x}_1)$和 $U(\mathbf{x}_2)$完全负相关；当ρ=0 时，$U(\mathbf{x}_1)$和 $U(\mathbf{x}_2)$不相关。特别地，相关系数反映的是线性依赖关系，当 $U(\mathbf{x}_1)$和 $U(\mathbf{x}_2)$不相关时，它们之间还可能存在其它的相关关系。

当随机变量 $U(\mathbf{x}_1)$，$U(\mathbf{x}_2)$，…$U(\mathbf{x}_n)$对于任何 n 都是联合分布为高斯分布时，那么随机场 $U(\mathbf{x})$

就称为高斯随机场。高斯随机场可完全由均值函数$\langle U(\mathrm{x})\rangle = \mu(\mathrm{x})$和自协方差函数$C_U(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)$表征，它的二维概率密度函数为

$$
\begin{aligned}
f(u_1,u_2) = {} & \frac{1}{2\pi\sigma_U(x_1)\sigma_U(x_2)\sqrt{1-\rho_U^2}}\exp\left\{\frac{-1}{1-\rho_U^2}\left[\frac{(u_1-\mu(x_1))^2}{2\sigma_U^2(x_1)}\right.\right. \\
& \left.\left. -\rho_U\frac{(u_1-\mu(x_1))(u_2-\mu(x_2))}{\sigma_U(x_1)\sigma_U(x_2)}+\frac{(u_2-\mu(x_2))^2}{2\sigma_U^2(x_2)}\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{7.1.17}
$$

如果随机场的前两阶矩满足以下性质，

$$
\begin{aligned}
& E[U(\mathrm{x})] = const \\
& \sigma_U^2(\mathrm{x}) = const \\
& C_U(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2) = C_U(\mathrm{r})
\end{aligned}
\tag{7.1.18}
$$

式中：$\mathrm{r}=\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1$为空间点$\mathbf{x}_1$和$\mathbf{x}_2$之间的距离向量，则称$U(\mathbf{x})$为二阶平稳随机场或弱平稳随机场。也就是说，二阶平稳随机场$U(\mathbf{x})$的均值和方差有界且为常数，其自协方差函数$C_U(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)$取决于两空间点$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$的相对位置，而与$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$的具体位置无关。

对于二阶平稳的高斯场，只需要知道均值和协方差函数就可以描述它的全部统计特征，同时可以定义如下积分（Dagan, 1986），

$$
\lambda_i = \frac{1}{\sigma_U^2}\int_0^\infty C_U(\mathrm{r})dr_i = \int_0^\infty \rho_U(\mathrm{r})dr_i \qquad i=1,2,3
\tag{7.1.19}
$$

式中：λ_i为相关尺度，它是$U(\mathbf{x})$的空间变异尺度的量度。对于空间随机函数，积分尺度λ_i是一个非常重要的统计参数，它近似地表达了当随机函数在两个空间位置之间的间距大于积分尺度时，两随机变量之间的相关程度很小，同时只有当所研究的含水层的扩展尺度远大于空间变异尺度时，所取得的系统观测数据才有可能符合遍历性假设，这时在观测网点对含水层的一次系统取样和观测所得数据才能作为推求统计参数的依据。

随机模拟中常用的两种协方差函数为

1)指数型

$$
C_U(\mathrm{r}) = \sigma_U^2\exp\left\{-\left[\sum_{i=1}^{d}\frac{r_i^2}{\lambda_i^2}\right]^{1/2}\right\}
\tag{7.1.20}
$$

2)离散指数型

$$
C_U(\mathrm{r}) = \sigma_U^2\exp\left[-\sum_{i=1}^{d}\frac{|r_i|}{\lambda_i}\right]
\tag{7.1.21}
$$

式中：d是空间维数，λ_i满足式(7.1.19)。

如果协方差函数仅依赖于空间两点$\mathbf{x}_1$和$\mathbf{x}_2$之间的距离而与两者的方向无关，则称$U(\mathbf{x})$为各向同性平稳随机场。当$\lambda_1=\cdots\lambda_d$时，指数型协方差为各向同性的；而对于离散指数型协方差，

即使 $\lambda_1 = \cdots \lambda_d$，也是各向异性的，因为它总是与两空间点的方向有关。

在地下水动力学研究中，一些地层参数(如含水层渗透系数，导水系数和孔隙度)和流体力学变量(如水头压力，地下水浓度以及地下水流速)均为随机场，这些随机场除具有各自的多维分布函数外，有时尚需考虑不同随机场之间的相互统计关系，这时可由随机场的联合分布函数表示，如

$$F_{UV}(u, \mathrm{x}_1; v, \mathrm{x}_2) = P[U(\mathrm{x}_1) \le u, V(\mathrm{x}_2) \le v] \tag{7.1.22}$$

它们的联合概率密度函数为

$$f_{UV}(u, \mathrm{x}_1; v, \mathrm{x}_2) = \frac{\partial^2 F_{UV}(u, \mathrm{x}_1; v, \mathrm{x}_2)}{\partial u \partial v} \tag{7.1.23}$$

同样地，可以定义 $U(\mathbf{x})$和 $V(\mathbf{x})$之间的互协方差函数，

$$C_{UV}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = \left\langle [U(\mathrm{x}_1) - \langle U(\mathrm{x}_1) \rangle][V(\mathrm{x}_2) - \langle V(\mathrm{x}_2) \rangle] \right\rangle \tag{7.1.24}$$

互相关系数为

$$\rho_{UV} = \frac{C_{UV}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)}{\sigma_U(\mathrm{x}_1)\sigma_V(\mathrm{x}_2)} \tag{7.1.25}$$

二、 区域介质的空间变异性

（一） 饱和含水层中渗透系数(或导水系数)的空间变异性

饱和水力传导度（又称渗透系数），是含水层地下水系统最重要的水力参数，它的空间变异性直接影响到地下水和溶质运移方程的求解结果。因此，研究水力传导度的空间变异性是进一步研究地下水流和溶质运移的基础。

孔隙介质的水力参数，特别是水力传导度，在同一尺度和不同尺度的空间区域内可呈若干个数量级的变化。野外露头和钻孔等观测资料表明，水力传导度 K_s 值分布是不连续的，存在突变界面，比如砂土与黏土相邻，或者在几个厘米的范围内地下岩性发生突变，K_s 值的波动在几个厘米内可达数个数量级。单一水文地质相内 K_s 的变化比较缓慢，不同水文地质相之间的 K_s 差异远远大于单一相内部的 K_s 变化，在黏土和砂砾的交互沉积的含水层中，其变化幅度可达 13 个数量级 (Koltermann and Gorelick, 1996)。

很多学者对含水层渗透性能的空间变异性及随机结构进行了广泛研究。Freeze (1975)统计了大量饱和渗透系数和孔隙度空间变异性结果，认为渗透系数可以用对数正态分布来描述，即 f: N(μ_f, σ_f)，其中 $f = \ln(k_s) - \langle \ln(k_s) \rangle$, k_s 为饱和渗透系数，$\langle x \rangle$ 表示随机变量 x 的集平均。Freeze 的结论已被后来的研究进一步证实并在地下水研究中得到广泛应用 (Gelhar, 1983; Dagan, 1982a,b, 1984)。根据 Freeze 所搜集的有关砂岩及不同土壤的渗透系数得到，当渗透系数单位取为 cm/s 时，μ_f 的变化在−2~ −6 之间，而 σ_f 的变化范围为 0.2~ 2.0。与渗透系数相比，孔隙度的空间变异性较小，大

量的实验结果表明，孔隙度 n 的分布为正态分布，均值为 0.1~0.3，均方差为 0.03～0.07。岩土的压缩系数的实验资料较少，难于判别其概率分布，岩土的压缩系数 α 一般与岩土颗粒的大小有关，也与土壤的渗透系数有关，在没有其他数据的条件下，根据以上的概念，可以假设压缩系数为对数正态分布。压缩系数的均值为−8～−11（cm/dyne），均方差为 0.1~1。

由于含水层的渗透系数是空间随机函数，要完整地表示其空间分布特征需要知道不同空间点的联合分布。若 k_s 为对数正态分布，除知道 f 的均值和方差外，还必须知道 f 的协方差函数 $C_{ff}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$，其中 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 表示空间上任意两点。对 $C_{ff}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$ 的推断需要测定大量不同距离观测点处的渗透系数结果，目前这样的详细观测并不多见。Freeze(1975)系统地分析过一些含水层的水力传导度对数 $f=\ln K_s$ 的均值 m_f 和标准差 σ_f 等统计数据，当渗透系数单位取为 cm/s 时，砂卵石含水层分别为−8.79 和 0.92，淤泥层分别为−6.90 和 2.14；壤土层分别为−6.16 和 1.98。在天然水力梯度流动条件下，Sudicky(1986)对中细颗粒砂质含水层分析 m_f 和 σ_f 分别为−4.63 和 0.38。Freeze(1975)还分析了孔隙度的试验资料，其均值 m_n 范围为 0.1~0.3，标准差 σ_n 范围为 0.03~0.07。Bakr(1976)分析了同一钻孔岩心的孔隙度和渗透率，发现孔隙度的变化范围为一个数量级，而渗透率的变化范围可达到三个数量级。由此可见，与渗透系数相比，孔隙度的空间变异性较小，因而许多饱和流动的随机模拟都将孔隙度作为确定性的常量处理。

到目前为止，有关溶质运移的空间变异分析最详细的野外实验应是在加拿大波但（Borden Site，Ontario，Canada）空军基地所开展的（Sudicky, 1986），该地为潜水含水层，实验观测范围沿水流运动方向 120m，垂直于水流方向 50m，观测深度至地表以下 8m。对 1279 个非扰动土样分析渗透系数，846 个非扰动土样分析颗粒分布。在 9 个溶质注入孔注入氯离子和溴离子，多高程取样孔的水平距离为 1～4m，在每一取样孔中的垂直取样间隔为 0.2~0.3m，共计 5000 个取样点，在三年的实验期间取样 20000 个，得到不同类型溶质在水平和垂直方向的分布。平行和垂直于水流运动方向的两个剖面所取的岩芯共有 32 个钻孔，每一个钻孔的岩芯长度为 2m，深度为地面以下 2.5~4.5m。渗透系数测量的间隔是：水平方向 1m，垂直方向 0.05m，一共 1279 个样品。两个剖面的渗透系数结果表明，最大值为 2×10^{-2}cm/s，最小值为 6×10^{-3}cm/s，两者之差为 30 倍，方差为 0.29。利用 Gelhar 模型得到的弥散度为 0.6m，垂向平均后利用 Dagan 模型得到的宏观弥散度为 0.45m。

根据测量的渗透系数做直方图，水平方向 2m 间隔，直方图的直观结果和统计检验结果表明，渗透系数为对数正态分布。$f=\mathrm{Lg}K$ 的均值为－4.63，总体方差为 0.38，渗透系数的几何平均为 9.75×10^{-3}cm/s，各个钻孔的均值比较稳定，但是方差波动较大。利用指数模型得到水平和垂直协方差函数，通过 95％的可信度检验，得到水平方向的相关尺度为 2.8m，垂直方向的相关尺度为 0.12m。因此，该地的协方差函数 C_{ff} 的建议形式为

$$C_{ff}(h)=\sigma_Y^2\exp\left[-\left(\frac{h_1^2}{\lambda_1^2}+\frac{h_2^2}{\lambda_2^2}+\frac{h_3^2}{\lambda_3^2}\right)^{1/2}\right] \tag{7.1.26}$$

$$\lambda_1=\lambda_2=2.8m \qquad \lambda_3=0.12m, \qquad \sigma_Y^2=0.29$$

另一个比较详细的野外实验研究是在美国密西西比哥伦布空军基地（Columbus Air Force Base, Northeastern Mississippi, USA）开展的区域溶质运移实验研究（Rehfeldt et al., 1992），实验底层为潜水含水层，厚度 11m，在实验区的 4 个孔中取样 84 个非扰动土样分析孔隙度和容重，2187 个钻孔流速实验数据确定渗透系数。取吸附性和非吸附性溶质作为示踪剂，5 口井中注入溶质，

井间隔 1m，滤网深度为 7.48m，取样孔中取样深度的间隔为 0.38m，变化范围为 0.25~0.46m，共有 258 个取样孔和 6000 个取样点，平行于水流方向的取样范围为 350m，垂直于水流方向为 200m，取样深度地表以下 12m。

渗透系数的测量方法包括直接测量和非直接测量法，直接测量包括利用钻孔流速仪测量、脉冲测量和非扰动土样的实验室测量；非直接测量通过颗粒分布、地表电阻和土壤沉积特征进行分析。利用钻孔流速仪测量的井共有 52 个，在每一口井中进行参数测量的间隔是 15cm，测量了 2483 个渗透系数值。在 22 个点进行脉冲测量。非扰动土样测量共有 10 个点，岩芯 8cm 直径，76cm 长，测量的土样长度为 7.6cm，共有 88 个渗透系数测量结果。对 214 个土样进行粒径分析测量，土样取之于 30 个钻孔，垂直的取样间隔为 0.75~1.5m。利用地面电法确定渗透系数的水平相关特征，共测量了 4 个平行剖面，各剖面间隔为 61m，在每一剖面上有 53 个测点，测点间隔为 30m。大地电法测量 197 个点，在研究区为 15.2m 的测量间距，区域之外 30.5m 的测量间距。渗透系数场的测量结果表明：①渗透系数具有趋势性；②渗透系数的大小在不同的实验井可相差 2～4 个数量级；③研究区具有典型冲积古河道的分布特征。

钻孔流速仪的测量结果表明，渗透系数满足对数正态分布，渗透系数沿水平方向为各向同性，沿垂直方向有明显的各向异性，得到的方差和相关尺度见表 7.1。目前国际上主要开展野外渗透系数详细观测所得到统计结果的比较见表 7.2。

表 7.1 渗透系数统计参数

参数		$\sigma^2_{\ln K}$	λ_h, m	λ_v, m
最优确定结果		2.7	4.8	0.8
可信区间	下限	2.3	4	0.6
	上限	3.1	6.9	1.1

表 7.2 不同实验尺度渗透系数实验的统计结果比较

实验地点	实验尺度 (沿水流×垂直水流×深度)	σ^2	λ_h (m)	λ_v (m)
Columbus[1]	350×200×12	2.7	4.8	0.8
Borden[2]	120×50×8	0.29	2.8	0.12
Cap Cod[3]	280×50×10	0.26	5.1	0.26
Twin Lake[4]		0.031	3	0.91

1 Rehfeld K R, Boggs J M and Gelhar L W , 1992；2 Sudicky E A ,1986；3 Hess K M, 1992；4 Moltyaner G L,1986.

大量的研究结果表明，渗透系数服从对数正态分布，其相关函数可以用指数模型表示，渗透系数在水平方向基本上为各向同性，与垂直方向呈各向异性，水平方向与垂直方向相关尺度的比值为5~20，渗透系数的统计参数变化较大，即便是对于野外区域的大样本数据集，统计参数仍具有很大的差异，说明渗透系数具有很大的不确定性。

黄冠华(1999)对19种含水层和9种土壤的饱和水力传导度的试验资料分析结果表明，lnK_s的相关长度随区域尺度的增大而明显增大，且相关长度约为区域尺度的1/10左右。

众多野外试验和随机模拟中都认为含水层渗透系数满足对数正态分布，其统计特征可用数学期望和协方差函数或矩阵完全描述。但是，最近有学者对含水层渗透性能参数的对数正态分布有所争议。Gomez-Hernandez 与 Wen(1998)指出，尽管有大量的野外资料支持 lnK_s的单变量高斯分布，但并没有足够的数据验证其多元高斯分布的存在，而且高斯随机场弱化了高渗透性介质的空间连通性。Painter(1996)在研究一个特定的层状非均质岩层的渗透系数时认为，参数空间分布特征用 Lévy 稳态概率分布函数更符合实际情况。

（二） 非饱和土层水力特性的空间变异性

非饱和土壤的渗透性能不仅决定于土壤的饱和渗透系数，还与土壤含水量的分布有关，在两者的共同作用下，非饱和水力传导度随空间的变化更加复杂。水力传导度和水分特征曲线可表示为负指数形式(Gardner, 1958; Russo, 1988)

$$K(h) = K_s e^{\alpha_G h} \tag{7.1.27}$$

式中：K_s为饱和渗透系数；α_G为土壤参数，与介质的几何特征有关。Yeh 等(1983)根据 Nilsion 等(1973)得出的大量有关非饱和水力传导度的野外试验结果得出σ_f^2,σ_α^2 和μ_α分别为 2.47, 6.7×10^{-5}cm^{-2}和 0.0294cm^{-1}。根据 Carvollo 等 (1976)对砂壤的试验结果，得出σ_f^2=7.45, σ_α^2=0.006cm^{-2}和μ_α=0.147cm^{-1}。在非饱和水流运动的随机理论分析中，非饱和土壤水力传导度的函数形式多采用指数形式[式(7.1.27)]，其相应的水分特征曲线模型(Russo, 1988)为

$$\theta(\mathrm{x},t) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r)\left\{\exp[0.5\alpha_G h(\mathrm{x},t)][1 - 0.5\alpha_G h(\mathrm{x},t)]\right\}^{2/(\gamma+2)} \tag{7.1.28}$$

另一种应用较为广泛的非饱和水分参数的函数表达为van Genuchten形式(van Genuchten, 1980)。其非饱和水力传导度和水分特征曲线的表达形式为

$$\begin{aligned} K(\theta) &= K_s \Theta^{0.5}\left\{1 - \left[1 - \Theta^{1/m}\right]^m\right\}^2 \\ \theta(h) &= \theta_r + (\theta_s - \theta_r)\left[1 + (\beta h)^n\right]^{-m} \end{aligned} \tag{7.1.29}$$

式中：$\Theta = \dfrac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}$，$\theta_s$，$\theta_r$分别为饱和含水量和残余含水量；$m$ =1－1/n；n, β为模型参数，称为介质的形状函数(Russo, 1992; van Genuchten et al., 1980)。

Russo和Bouton (1992) 在深2.5m，长20m的土壤剖面上取得非扰动土样417个。采用上述两种模型，用入渗法反求非饱和水分参数，研究结果表明，指数模型中的lnK_s, lnα, 和van Genuchten 模型中的lnK_s，lnβ，n为正态分布。这里，K_s 为饱和渗透系数；α为指数模型中的指数取值；β和n为van Genuchten 模型中和介质颗粒分布有关的参数。lnK_s，lnα和lnβ具有相当大的空间变异性，而van Genuchten 模型中的参数n变异性较小。水平方向各种参数的相关尺度为垂直方向的2-4倍。lnKs与lnα或lnβ之间的相关关系比较微弱，可视为相互独立的随机变量。White 与 Sully (1992) 通过机理分析和野外试验也指出，lnK_s和lnα为正态分布，同时他们认为土壤容水度$C = d\theta / d\varphi$也

应为对数正态分布。

Jury (1985) 分析了大量的野外条件下不同土壤参数相关尺度的测量结果(表7.3)，他认为所求得的相关尺度与取样间隔有密切关系，一般来说，取样间隔越大，求得的相关距离越大。此结论是具有一定物理背景的，因为取样尺度大，则得到的相关尺度更多地描述了大尺度的空间变异情况。另外，所求得的相关尺度大小也与原始数据中的趋势项有关(Gelhar, 1992)。 因为介质的相关尺度是影响区域溶质运移特征的主要指标，如何得到可靠的相关尺度值是目前需要进一步研究的课题。

谢永华等(1998)在30m×30m砂壤土田内通过圭尔夫仪测定GR模型中土壤参数水力特性，获得107个K_s样本和41个α样本，分析结果表明，饱和水力传导度具有较强的变异性，空间变化幅度相差1个数量级，饱和水力传导度K_s呈正态分布，孔隙大小分布参数α呈对数正态分布，水平相关长度分别为6.89m和3.29m。蔡树英等(2002)在36m×40m壤土试验田中对GR模型参数的试验研究表明，K_s和α均为对数正态分布。国内外开展的非饱和水力传导度的统计特征见表7.3。

表7.3 非饱和水力传导度的统计特征参数

研究者	变量	均值（cm/min）	方差	水平相关尺度（m）	垂直相关尺度（m）	实验尺度（m）
Russo	Lg（K_s）	-3.66	0.89	0.8	0.2	20
	Lg（α）	-1.99	0.77	0.3	0.1	20
蔡树英	Lg（K_s）	-8.34	1.10	6.94		40
	Lg（α）	-1.51	2.04	10		40
黄冠华	K_s		0.22	6.89		30
	Lg（α）		0.91	3.29		30

饱和水力传导度K_s的空间变异性已经得到了广泛的研究，而非饱和模型中的其他参数如α的变异性的研究却很少。同时，K_s的测量可以直接进行，而α一般通过间接的方法确定。然而，Yeh(1985)却指出α的空间变异性对非饱和流的影响较大。

如上所述，众多试验研究对参数的统计特征并没有达成一致。一些试验研究表明K_s和α呈对数正态分布，也有研究表明α呈正态分布。同样地，参数的相关尺度以及它们之间的相关关系也没有统一。Unlu 等(1990)发现$\ln\alpha$的垂向和水平向相关尺度比$\ln K_s$相应相关尺度大。Russo与Bouton(1992)研究表明$\ln\alpha$的相关尺度近似为$\ln Ks$相应相关尺度的1/3。蔡树英等(2002)分析表明，$\ln\alpha$的水平相关尺度大于$\ln K_s$的水平相关尺度。Unlu 等（1990）的试验研究表明$\ln K_s$与$\ln\alpha$有较大的互相关性。而Raga 与Cooper(1993a,b)指出$\ln K_s$和$\ln\alpha$之间缺乏相关性。鉴于上述试验研究成果，在非饱和流随机分析中，有的研究将α作为高斯随机场，也有的将其作为对数正态随机场，有的研究忽略各参数场之间的互相关性，也有的考虑它们为完全相关。

（三） 野外宏观弥散参数的空间变异性

以上讨论说明，介质的非均匀性和空间变异性是岩层本身的固有特征，它导致了渗透性能的空间变异性，而渗透性能的变异性直接影响到地下水中溶质的运移过程。近年来地下水环境问题

日益引起人们的关注，含水层中溶质的混合和弥散现象成为地下水研究中的热门课题。对某一地区地下水中污染物运动和扩散过程的预报，必需首先得到表征该地区污染物弥散特征的参数——弥散度。现有的理论成果和野外试验结果都表明，在实验室内测得的弥散度比同类介质在野外条件下所求得的结果相差几个数量级。目前人们趋于一致的看法是，这种巨大的差别起源于野外条件下介质的非均匀性。这种看法的证明通过在室内小尺度范围内的试验是不可能实现的，严格证明需要进行高精度的大区域弥散试验，但这类试验将是耗资、费时和难度很大的工作。目前在世界范围内只有几个试验达到这种要求 (Mackay et al.,1986; Boggs et al.,1992)，Gelhar 等(1992) 对世界范围内所收集的 59 个大区域弥散试验资料进行了分析，对资料的可信度进行了分级，并详细给出各观测场的具体条件，为进一步研究野外大区域溶质弥散的空间变异特征提供了一定基础。图 7.1 为纵向弥散度与试验尺度的关系，图中数据点的大小表示数据的可信度。由图可以看出，纵向弥散度随着试验尺度的增加而增大，但若考虑数据可信度的因素时，这种变化趋势则不甚明显。可靠性较大的试验范围一般小于 250m。在试验范围为 10^{-1}~10^{5} m 时，纵向弥散度大小为 10^{-2}~10^{4} 。裂隙介质和孔隙介质间弥散度的差别不大。在一个给定的试验尺度内，纵向弥散度的变化为 2~3 个数量级，而可靠性较高的数据一般相差 2 个数量级。水平横向弥散度比纵向弥散度小一个数量级，垂直横向弥散度比水平横向弥散度小一个数量级。

在实际应用中我们所关注的问题是地下水及污染物在大范围内和长时间内的运动特征，那么，如何得到区域弥散参数将是需要进一步研究的重要课题。

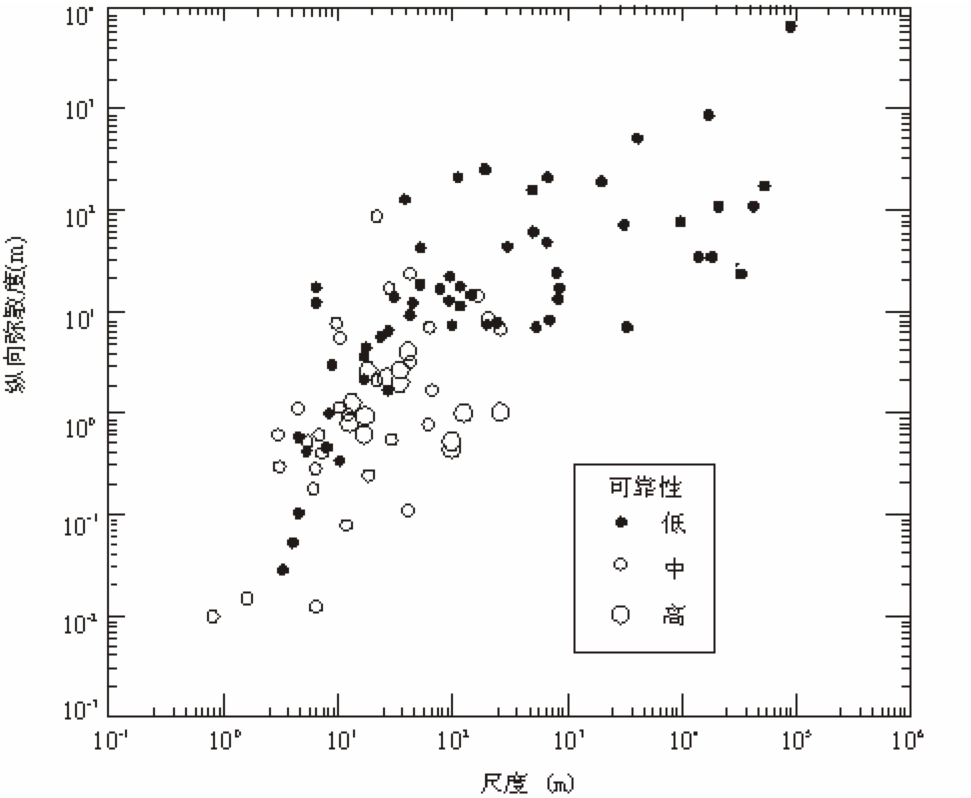


图 7.1 含水层纵向弥散度随研究尺度的变化特征

第二节　随机模拟的数学方法

在以往的确定性地下水模拟分析中，对于给定的定解问题，地下水水位（或水质）在空间和时间的分布是确定的，也就是说，对于给定的地下水预测分析，所得到的结果是唯一的。但是由于介质特性、边界条件、地下水补给和开采、控制方程等都具有不确定性，各种不确定因素之间可能相互联系，也可能相互独立，在这些不确定因素的影响下，地下水水位（或水质）的分布无论在空间或时间上都是不确定的，我们需要了解其分布特征和统计规律。对于水流或溶质运移问题，控制方程可以写为

$$\mathfrak{L}\left(a\left(\omega,\mathbf{x},t\right)\right)\left(u\left(\omega,\mathbf{x},t\right)\right)=f\left(\omega,\mathbf{x},t\right) \tag{7.2.1}$$

式中：$\mathfrak{L}$ 为线性或非线性偏微分算子；a 为随机参数；u 为待求的未知函数，表示水头或地下水浓度的时空分布；ω 为样本空间的产出；$\mathbf{x}$ 为空间向量；t 为时间变量；f 为源汇项。由于式（7.2.1）中参数 a 和齐次项 f 为空间随机函数，该方程为随机微分方程，具体在本文中，式(7.2.1)为地下水流动方程和对流弥散方程。式(7.2.1)具有相应边界条件，即

$$\begin{aligned}
&u\left(\omega,\mathbf{x},t\right)\Big|_{t=0}=u_0\left(\omega,\mathbf{x}\right)\\
&u\left(\omega,\mathbf{x},t\right)\Big|_{\mathbf{x}\in S_1}=u_1\left(\omega,\mathbf{x},t\right)\\
&a\left(\omega,\mathbf{x},t\right)\nabla u\left(\omega,\mathbf{x},t\right)\Big|_{\mathbf{x}\in S_2}=Q\left(\omega,\mathbf{x},t\right)
\end{aligned} \tag{7.2.2}$$

式中：u_0 为起始时刻的水头或浓度分布；u_1 为在边界 S_1 上 u 的取值；Q 为在边界 S_2 上水流通量或溶质的扩散通量。以上函数都为随机函数，表明起始条件和边界条件都是不确定的，而是随机分布的。式（7.2.1）和（7.2.2）表明，控制方程中参数和源汇是随机函数，同时起始条件和边界条件也是随机函数，那么由式（7.2.1）和（7.2.2）所表示的地下水运动或溶质运移是由一套随机微分方程来控制，确定地下水水位和浓度分布的过程就是以上随机微分方程的解。

由数学模型预测地下水流和运移包含了许多的不确定性，在过去二三十年，很多研究者用随机模型来定量化不确定性。这些模型通常包含随机偏微分方程，多数是从解析解的角度来研究这些方程。然而解析方法受诸多方面条件的限制，对于实践应用而言最有用的是随机流动方程的通用数值方法。随机偏微分方程的数值解通常要耗费相应确定性模型求解的几个数量级的 CPU 时间。然而，随着计算机性能的快速提高和数学方法的不断改进，数值求解策略得到越来越多研究者的兴趣。

Dettinger 与 Wilson(1981)将随机方法分为两类：完全分布分析和矩分析。前者在已知所有随机输入参数的概率分布的条件下希望得到地下水系统输出的概率分布，而后者是通过前两阶统计矩来刻画随机场。

对于连续随机场，需要无限数量个点之间的联合概率密度函数才能完全地描述其统计结构，水流变量也是连续随机场，其完整的描述也应是无限数量个点之间的联合概率密度函数，显然它与水流系统随机输入的概率密度直接相联系。原则上，可以从原来的随机微分方程出发推导水流变量的概率密度函数所满足的方程然后求解，然而概率密度方程也是非常难求解的，况且通过目前有限的测量也不大可能准确获得输入随机场的概率密度函数，因此，只能通过统计矩来对水流变量随机场进行描述。

相对而言，通过观测容易得到的资料是输入随机场的低阶统计矩的信息，因此最常用的求解思路就是根据系统输入的统计矩信息获求水流变量的统计矩。在地下水的随机模拟中用得最多的就是蒙特卡罗（Monte-Carlo）模拟和基于摄动的技术。后一种方法通常被认为比 Monte-Carlo 模拟的效率要高。摄动分析实际上是一种级数展开，产生一系列的偏微分方程，方程的求解通常截断到一阶，当随机参数的空间变异较小时，它收敛于实际解。尽管没有有力的规范标准证明摄动方法的适用范围，很多研究表明当对数变换后水力传导度的方差在 1～3 时，仍能得到比较好的结果。

下面以非均质介质中稳定饱和流为例，介绍几种主要的随机模拟方法。水流控制方程为

$$\nabla\left[K(\mathrm{x})\nabla h(\mathrm{x})\right]=0 \tag{7.2.3}$$

流动方程定义在区域Ω上，并且有恰当的确定性边界条件。将饱和水力传导度视为随机场，那么在方程(7.2.3)中水头也是随机场。这样必需寻找物理量的概率分布或统计矩。根据已有试验资料和随机分析中的常用方法，认为 f=lnK_s 为高斯随机场，同时其均值和协方差函数已知。由于水力传导度作为系数出现在流动方程(7.2.3)中，因而方程(7.2.3)的解函数 $h(\mathbf{x})$是 $K(\mathbf{x})$的非线性函数。水头场并不一定为正态或对数正态分布，为了完全描述水头，则必须知道所有阶数的统计矩。然而对于实际应用，主要关心的是前两阶矩，即期望值与(协)方差。

一、 蒙特卡罗模拟

蒙特卡罗(Monte-Carlo)方法是最为直接的求解随机地下水流运动方程的数值方法，将介质参数作为随机场，通过一定的数学技术，产生介质参数随机分布的大量实现。参数场的每一个随机实现被用来以确定性的方式数值求解流动方程，因而每一个实现产生一个随机的流动解。通过大量的数值模拟计算后，对许多这样的随机解进行统计分析，能够得到水流变量的均值、方差等各种统计量。

蒙特卡罗模拟包括两个主要的步骤：① 生成具有一定统计性质的介质参数的实现；②数值求解流动方程。这两个步骤需要重复多次。Monte-Carlo 模拟的质量主要取决于实现产生的好坏，必须保证实现能够重现随机场的输入统计矩。有多种办法可以生成随机场，包括转动带法、谱方法以及最近相邻方法等等。可以用有限差分法、有限元法、边界元法等数值求解方程。水力性质需在计算节点之间插值或平均，计算节点的网格应该避免将水力性质的小尺度波动平均掉。有文献建议土壤水力性质的相关长度之间最少有 4~5 个节点。

在地下水随机理论的发展过程中，Monte-Carlo 模拟被广泛地用来研究介质的非均质性对地下水系统的影响，如 Ababou 等(1989)，Tompson 与 Gelhar (1990)。许多非饱和带的研究中，如 Unlu 等(1990)，Russo 与 Dagan(1991)等，使用 Monte-Carlo 模拟分析介质空间变异性对水流和溶质运移的影响。由于数值求解困难，很多研究只用了相对较少的模拟次数，因此相应的抽样统计矩可能不具有代表性。特别对于非饱和问题，由于非饱和 Richards 流动方程的非线性，数值方法必须采用迭代方法，为了求解需要大量的迭代。此外 Monte-Carlo 模拟要求相对密集的网格来求解随机场的高频变化。因此用 Monte-Carlo 模拟求解 Richards 方程需要很大的计算工作量。对非饱和流的 Monte-Carlo 模拟还碰到的一个困难就是当介质是高度非均质时，不能保证数值求解非饱和水流运动问题的收敛。为了获得有意义的统计结果，必须运行大量的模拟，模拟的次数随着介质的非均质性而增加。

蒙特卡罗模拟方法通常不需要过多假设，广泛应用于线性和非线性的水流问题和溶质运移问题。虽然蒙特卡罗模拟有着无可置疑的优势，但是它的缺点也是非常明显的。蒙特卡罗模拟的一个概念上的劣势就是无法直接给出物理现象的理论表达式，因而不能直接得知各物理量之间的统计关系。蒙特卡罗模拟方法的结果不具有通用性，当条件稍有变化，便不能利用先前的模拟结果，而必须重新计算。蒙特卡罗模拟方法是基于随机抽样试验的，它的计算工作量非常大，需要计算大量样本，对计算机的性能要求较高，高效的随机抽样方法研究也是目前研究的前沿问题之一。对于高度非线性随机微分方程，蒙特卡罗模拟也无法保证其收敛性，目前还没有一个计算准则能够给出保证一定精度所需的样本计算量。该方法通常用来检验其他随机方法的正确性。鉴于蒙特卡罗模拟的缺点，人们一直在发展其他方法来求解随机流动问题。

二、 基于 Karhunen-Loève 展开的随机分析方法

近来，联合运用 Karhunen-Loève 展开和摄动展开的随机分析方法发展起来，该方法具有较高的计算效率。Karhunen-Loève(KL)分解提供了一种描绘随机场的有效方法。随机场可以写成展开式序列，而且由于这些函数在均方意义上是统计最优的，因而在展开式中只需要少量的项数即可较准确地描述随机场。作为基于协方差矩阵的随机场简化的时间空间描述，KL 展开提供了一种独特的描述介质特性随机场的工具。

KL 展开在本质上是分解随机过程协方差的一种谱空间展开，并且它的确定性展开系数是与输入协方差函数的特征值和特征函数相关的。多项式扰动展开的系数可以从原始的水流方程中求出。在此基础上只要通过简单的代数运算就可以求出水流变量的均值、协方差以及其他各阶矩。

Roy 等(1997)在饱和流的一阶摄动分析中引入了 KL 展开。Zhang 与 Lu(2004)联合 Karhunen-Loève 展开和摄动方法，针对一个简单的二维承压水运动问题计算了高阶水头均值和方差。Yang 等(2004)采用此方法研究非饱和流问题，考虑 Gardner 模型中饱和水力传导度和孔隙大小分布参数这两个随机场输入的情况。

三、 矩方程方法

矩方程方法(ME 方法)也是将随机输入表示为均值和扰动之和，$f=\langle f\rangle+f'$，但是将未知的水头表示为渐进级数展开，

$$h(\mathrm{x})=h^{(0)}(\mathrm{x})+h^{(1)}(\mathrm{x})+\cdots \tag{7.2.4}$$

将式(7.2.4)代入到方程(7.2.3)中，然后根据摄动方法将各阶的方程分开，得到各阶方程，

$$\nabla^2 h^{(0)}(\mathrm{x})+\nabla\langle f(\mathrm{x})\rangle\cdot\nabla h^{(0)}(\mathrm{x})=0 \tag{7.2.5}$$

$$\nabla^2 h^{(1)}(\mathrm{x})+\nabla\langle f(\mathrm{x})\rangle\cdot\nabla h^{(1)}(\mathrm{x})+\nabla f'(\mathrm{x})\cdot\nabla h^{(0)}(\mathrm{x})=0 \tag{7.2.6}$$

矩方程方法通常计算到一阶，在一阶方程的基础上得到水流变量协方差所满足的方程，

$$\nabla^2 C_h(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \nabla\langle f(\mathrm{x})\rangle \cdot \nabla C_h(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \nabla C_{fh}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \cdot \nabla h^{(0)}(\mathrm{x}) = 0 \tag{7.2.7}$$

$$\nabla^2 C_{fh}(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \nabla\langle f(\mathrm{y})\rangle \cdot \nabla C_{fh}(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \nabla C_f(\mathrm{x},\mathrm{y}) \cdot \nabla h^{(0)}(\mathrm{y}) = 0 \tag{7.2.8}$$

由方程(7.2.5)和(7.2.7)、(7.2.8)可见均值方程和二阶矩方程是递推关系，只需按顺序求解即可。Zhang(1998)和 Zhang 与 Winter(1998)采用矩方程法对饱和流和非饱和流问题进行了随机分析，其中对统计矩的方程采用有限差分法求解，将所得到的结果都与相应的蒙特卡罗方法的计算结果进行了比较，证明矩方程方法具有较好的精度和实际应用价值。

矩方程方法求解二阶矩方程的计算工作量较大，在一阶分析的情况下所需要求解的方程个数与剖分节点数目成正比。例如，计算压力水头的协方差 $C_h(\mathbf{x},\mathbf{y})$，首先需要求解每个节点相对所有 n 个网格节点的互协方差 $C_{fh}(\mathbf{x},\mathbf{y})$，这样就很容易引起对内存和 CPU 的要求超出现有计算机所能达到的上限。

四、 扰动方程与闭合近似

摄动方法是地下水随机模拟中用得较多的方法，将对数饱和水力传导度和水头表示为均值和扰动之和，即

$$\begin{aligned} f(\mathrm{x}) &= \langle f(\mathrm{x})\rangle + f'(\mathrm{x}) \\ h(\mathrm{x}) &= \langle h(\mathrm{x})\rangle + h'(\mathrm{x}) \end{aligned} \tag{7.2.9}$$

将式(7.2.9)代入方程(7.2.3)并对方程两边取集平均，可得到水头均值的微分方程，

$$\nabla^2\langle h(\mathrm{x})\rangle + \nabla\langle f(\mathrm{x})\rangle \cdot \nabla\langle h(\mathrm{x})\rangle = -\langle \nabla f'(\mathrm{x}) \cdot \nabla h'(\mathrm{x})\rangle \tag{7.2.10}$$

由方程(7.2.10)可见必须首先确定右端项才能求解水头均值 $\langle h(\mathrm{x})\rangle$。

方程(7.2.3)减去方程(7.2.10)可得水头扰动的微分方程，

$$\begin{aligned} &\nabla^2 h'(\mathrm{x}) + \nabla\langle f(\mathrm{x})\rangle \cdot \nabla h'(\mathrm{x}) + \nabla f'(\mathrm{x}) \cdot \nabla\langle h(\mathrm{x})\rangle \\ &\quad = -\nabla f'(\mathrm{x}) \cdot \nabla h'(\mathrm{x}) + \langle \nabla f'(\mathrm{x}) \cdot \nabla h'(\mathrm{x})\rangle \end{aligned} \tag{7.2.11}$$

由方程(7.2.10)和(7.2.11)可见，一阶矩 $\langle h(\mathrm{x})\rangle$ 的方程和水头扰动方程都包含有一个随机输入 $f'(\mathrm{x})$ 与输出扰动 $h'(\mathrm{x})$ 的二阶乘积项，因而该方程的求解与高阶矩的方程是嵌套在一起的。

如果从这个方程直接求解协方差函数，则会因为包含有三阶矩而无法直接求解。

$$\begin{aligned} &\nabla^2\langle h'(\mathrm{x})h'(\mathrm{y})\rangle + \nabla\langle f(\mathrm{x})\rangle \cdot \nabla\langle h'(\mathrm{x})h'(\mathrm{y})\rangle + \nabla\langle f'(\mathrm{x})h'(\mathrm{y})\rangle \cdot \nabla\langle h(\mathrm{x})\rangle \\ &\quad = -\langle \nabla f'(\mathrm{x}) \cdot \nabla h'(\mathrm{x})h'(\mathrm{y})\rangle \end{aligned} \tag{7.2.12}$$

类似地，也可以推导三阶矩的方程，同样会发现三阶矩方程包含有更高阶矩，这样总是有多于方程个数的未知量，从而方程始终无法求解，这就碰到了所谓的闭合问题。这时可以通过一定的闭合近似来解决该问题，当输入参数的扰动较小时，可认为高阶交叉项远小于低阶项，因而将其忽

略，得到线性化的随机扰动方程，从而可以求解。

$$\nabla^2 h'(\mathrm{x}) + \nabla\langle f(\mathrm{x})\rangle \cdot \nabla h'(\mathrm{x}) = -\nabla f'(\mathrm{x}) \cdot \nabla\langle h(\mathrm{x})\rangle \tag{7.2.13}$$

五、 谱分析方法

谱分析方法提供了一个途径从线性化方程(7.2.13)推导和求解统计矩。传统谱分析方法要求随机场是平稳场，将扰动表示为 Fourier-Stieltjes 积分形式，

$$f'(\mathrm{x}) = \int \exp(i\mathrm{k}\cdot\mathrm{x}) dZ_f(\mathrm{k}) \tag{7.2.14}$$

$$h'(\mathrm{x}) = \int \exp(i\mathrm{k}\cdot\mathrm{x}) dZ_h(\mathrm{k}) \tag{7.2.15}$$

式中：$i \equiv \sqrt{-1}$；**k** 为波数向量；$dZ_f(\mathbf{k})$和 $dZ_h(\mathbf{k})$分别为扰动的零均值复傅立叶增量。积分区间为波数空间的无限域(－∞，∞)。平稳傅立叶增量有如下正交性质，

$$\langle\langle dZ(\mathrm{k})\rangle\langle dZ^*(\mathrm{k}')\rangle\rangle = S(\mathrm{k})\delta(\mathrm{k}-\mathrm{k}')d\mathrm{k}d\mathrm{k}' \tag{7.2.16}$$

式中：dZ_f^* 为 dZ_f 的复共轭，S(**k**)为谱密度函数。

对于平稳介质的无界区域中的均匀平均流动，将积分表达式(7.2.14)和(7.2.15)代入原方程(7.2.13)可得，

$$dZ_h(\mathrm{k}) = -\frac{iJ_1k_1}{k^2} dZ_f(\mathrm{k}) \tag{7.2.17}$$

式中：$k^2 = \mathrm{k}\cdot\mathrm{k}$。利用性质(7.2.16)有，

$$S_h(\mathrm{k}) = \frac{J_1^2k_1^2}{k^4} S_f(\mathrm{k}) \tag{7.2.18}$$

对式(7.2.18)进行傅立叶变换就得到水头协方差，

$$C_h(r) = \int \exp(i\mathrm{k}\cdot\mathrm{r}) \frac{J_1^2k_1^2}{k^4} S_f(\mathrm{k}) d\mathrm{k} \tag{7.2.19}$$

Li 等(1991)提出了非平稳谱分析方法，使得谱方法得到进一步的发展。随机输入仍然作为平稳场，但是水头的扰动可以为非平稳场，将其表示为广义傅立叶积分形式，

$$h'(\mathrm{x}) = \int \phi_{hf}(\mathrm{x},\mathrm{k}) dZ_f(\mathrm{k}) \tag{7.2.20}$$

将上式与式(7.2.15)带入方程(7.2.13)，两边同时乘以复共轭，并取集平均得

$$\int \left|\nabla^2\phi_{hf}(\mathrm{x},\mathrm{k}) + \nabla\langle f\rangle\nabla\phi_{hf}(\mathrm{x},\mathrm{k}) + \nabla\langle h(\mathrm{x})\rangle\nabla(\exp(i\mathrm{k}\cdot\mathrm{x}))\right|^2 S_f(\mathrm{k}) d\mathrm{k} = 0 \tag{7.2.21}$$

方程(7.2.21)成立的充分必要条件为

$$\nabla^2\phi_{hf}(\mathrm{x},\mathrm{k}) + \nabla\langle f\rangle\nabla\phi_{hf}(\mathrm{x},\mathrm{k}) = -\nabla\langle h(\mathrm{x})\rangle\nabla(\exp(i\mathrm{k}\cdot\mathrm{x})) \tag{7.2.22}$$

通过数值方法求解方程(7.2.22)，就得到水头的扰动表达式，从而可以获得水头的统计矩。Li 等(2003，2004)又进一步改进了非平稳谱方法，但是仍然要求介质参数场平稳。

六、 格林函数法

前面已经推导了一阶摄动展开方程(7.2.13)，下面简述格林函数法的求解过程。为方便陈述，假定传导度场为平稳场，则$\langle f(\mathrm{x})\rangle$为常数，相应的一阶方程为

$$\nabla^2 h' = -\nabla f' \cdot \nabla \langle h \rangle \tag{7.2.23}$$

根据格林函数法，方程(7.2.23)的解在形式上可以表达为

$$h'(\mathrm{x}) = -\int_\Omega \nabla\big(f'(\mathrm{x}')\big)\nabla\big(\langle h(\mathrm{x}')\rangle\big) G(\mathrm{x},\mathrm{x}')d\mathrm{x}' \tag{7.2.24}$$

式中：$G(\mathrm{x},\mathrm{x}')$为格林函数，满足如下方程，

$$\nabla^2 G(\mathrm{x},\mathrm{x}') = \delta(\mathrm{x}-\mathrm{x}') \tag{7.2.25}$$

如果区域是无界的，在二维情况下，格林函数为

$$G(\mathrm{x},\mathrm{x}') = \frac{1}{2\pi}\ln\big(|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|\big) \tag{7.2.26}$$

如果一阶平均水头梯度为常数，即$\nabla\langle h\rangle = -J_1 \mathrm{i}$，那么式(7.2.24)为

$$h'(\mathrm{x}) = -J_1 \int_\Omega f'(\mathrm{x}') \frac{\partial G(\mathrm{x},\mathrm{x}')}{\partial x'} d\mathrm{x}' \tag{7.2.27}$$

在式(7.2.27)两边同时乘以$h'(\mathrm{x}')$并取集平均可得水头协方差函数，

$$C_h(\mathrm{x},\mathrm{x}') = J_1{}^2 \int_\Omega\int_\Omega C_f(\mathrm{x}'',\mathrm{x}''') \frac{\partial G(\mathrm{x},\mathrm{x}'')}{\partial x''} \frac{\partial G(\mathrm{x}',\mathrm{x}''')}{\partial x'''} d\mathrm{x}'' d\mathrm{x}''' \tag{7.2.28}$$

格林函数方法在多孔介质随机水流问题中得到广泛应用。它运用格林公式对扰动方程积分，将原微分方程转化为积分-微分方程形式，得到扰动的表达式。注意到该式含有满足一定方程的格林函数项，由于从一开始就应用了闭合近似，因而能够求解。Neuman 与 Orr (1993)，Tartakovsky 与 Neuman (1998a,b)，Guadagnini 与 Neuman (1999a,b)进一步发展了格林函数方法，应用确定性的或随机性的格林函数直接推导控制统计矩的方程，然后再用近似方法求解。只要采用一致的近似，这两种方法得到的结果是相同的。格林函数法虽然从理论上推导出了扰动表达式，但在实际求解过程中还是要引入闭合近似，因而并没有弥补方程线性化导致误差的这一不足。

第三节　地下水运动随机问题的蒙特卡罗方法

一、　空间随机场的模拟方法

随机场的模拟包括非条件模拟和条件模拟。非条件模拟就是在一、二或三维的空间产生一个随机分布（随机场），这个随机分布应是某一随机函数的实现，并且满足事先确定的空间变异结构（协方差函数或变异函数），以及其他统计量，如均值和方差等。对于条件模拟，在空间区域的某些点上，随机函数的实现满足预先给定的值。在理论上，这是一种获得随机变量的代表性函数的方法，在实用中，这种方法用来获得有限个点上的随机函数值。

根据随机变量的空间变异结构而建立起来的模拟方法有好几种，比如转动带法(Mantoglou and Wilson, 1982)、快速傅里叶变换方法(Gutjahr et al., 1978)等等，下面分别介绍转动带法、Karhunen-Loève 展开法和矩阵分解法。

（一）　转动带法

转动带法的思想是降维，即将二维、三维或更高维空间上的随机场转换到一维空间上模拟，然后把一维的模拟值线性叠加还原为高维模拟值。转向带法可以有很多种，其差异主要体现在一维随机场的实现方法上。转动带法的另一优点是并不要求模拟区域是规则的。

转动带法使用时要求转动带数较多，这样则使得实现过程较为复杂，而需要使实现随机场和待求随机场达到收敛，需抽样点数也很多，因此该方法计算较为耗时，一般仅用于较简单随机场的实现。

实现二维或三维乃至 N 维随机场的转动带法，基本步骤如下：

1）　在 N 维空间上任取一原点，作出直角坐标系，并以原点为圆心作出单位圆;

2) 给出转动带数（如 L=15）即转动带对应的一个单位向量 $\mathbf{u}_i,(i=1,2,\cdots,L)$，即指示转动带的方向，该方向可以随机生成，也可按照均布于空间的原则自行指定；

3) 根据空间上需要模拟的点的坐标，得出从原点到模拟点的坐标向量 $\mathbf{X}_j$，并计算该向量在第 i 条线上的投影值，即 $\xi_{ji}=\mathrm{u}_i^T\bullet\mathrm{X}_j$；

二维情况下，模拟点坐标向量为 $\mathbf{X}_j(x_j,y_j)$，设第 i 条线与 x 轴夹角为 θ_i，该夹角一般取为

$$\theta_i=2\pi i/L \tag{7.3.1}$$

则 $\mathbf{X_j}(x_j,y_j)$ 在该条线上投影值为

$$\xi_{ji}=\mathrm{u}_i^T\bullet\mathrm{X}_j=\left(\cos\theta_i,\sin\theta_i\right)\bullet\left(x_j,y_j\right)=x_j\cos\theta_i+y_j\sin\theta_i \tag{7.3.2}$$

三维情况下，坐标向量为$\mathbf{X}_j(x_j,y_j,z_j)$，第 i 条转动带与 x，z 轴夹角可取为

$$\theta_i = 2\pi i / L \tag{7.3.3}$$

$$\varphi_i = \pi i / L \tag{7.3.4}$$

则投影值为

$$\begin{aligned}\xi_{ji} &= \mathrm{u}_i^T \bullet \mathrm{X}_j = \left(\cos\theta_i \sin\varphi_i, \sin\theta_i \sin\varphi_i, \cos\varphi_i\right) \bullet \left(x_j, y_j, z_j\right) \\ &= x_j \cos\theta_i \sin\varphi_i + y_j \sin\theta_i \sin\varphi_i + z_j \cos\varphi_i\end{aligned} \tag{7.3.5}$$

4) 由上，则将多维向量$\mathbf{X_j}$转化为一维变量ξ_{ji}，多维随机场的实现则可以通过这种方式变为一维随机场的实现。多维值和一维值的关系为

$$Z(\mathrm{X}_j) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{i=1}^{L} Z(\xi_{ji}) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{i=1}^{L} Z(\mathrm{u}_i^T \bullet \mathrm{X}_j) \tag{7.3.6}$$

5) 一维随机场的实现：一维随机场的实现需要先知道协方差函数，因此还需要根据多维的协方差函数推求变换后的一维协方差函数。

（1）一维协方差的推导

对于某一维随机场$Z(\xi)$，$\xi \in R$（某一直线域），则其协方差定义为

$$C(\xi_1,\xi_2) = \mathrm{E}[(\mathrm{Z}(\xi_1) - \mu(\xi_1))\overline{(\mathrm{Z}(\xi_2) - \mu(\xi_2))}] \tag{7.3.7}$$

若$\boldsymbol{\xi}$变为多维随机向量，则上式也可表示为多维协方差函数。

为简单起见，假设模拟随机场为平稳场，则由式(7.3.6)知，多维随机场实现的均值与一维情况相等，均为$\mu = 0$，且协方差函数与空间点位置无关，只与两点间距离有关。则有

$$C^{(1)}(\xi_1,\xi_2) = \mathrm{E}[\mathrm{Z}(\xi_1)\mathrm{Z}(\xi_2)] \tag{7.3.8}$$

$$\begin{aligned}C^{(n)}(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2) &= E\left[Z(\mathrm{X}_1)Z(\mathrm{X}_2)\right] = \frac{1}{L} E\left[\sum_{i=1}^{L} Z(\xi_{1j}) Z(\xi_{2i})\right] \\ &= \frac{1}{L} E\left[\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{L} E\left[Z(\mathrm{u}_j^T \bullet \mathrm{X}_1) Z(\mathrm{u}_j^T \bullet \mathrm{X}_2)\right]\right] = \frac{1}{L} E\left[\sum_{i=1}^{L} C^{(1)}(\mathrm{u}_j^T \bullet \mathrm{h})\right]\end{aligned} \tag{7.3.9}$$

式中：h 为两向量之差。因为不同转动带上的模拟相对独立，上式只有在 i=j 时，才不为 0。

由上式，经二维协方差$C^{(2)}(\mathbf{X_1},\mathbf{X_2})$或三维协方差$C^{(3)}(\mathbf{X_1},\mathbf{X_2})$反推一维协方差$C^{(1)}(\mathrm{u}_i^T \bullet \mathrm{h})$，过程较为复杂，已有许多学者对其开展了研究，知道一维协方差后，即可模拟一维随机场，从而得出多维随机场的实现。

当转动带数非常大时，即将转动带方向角无限细分，可以将式(7.3.9)转化为积分形式，从而可以导出一维协方差。早在 1974 年，Journal 研究了三维随机场与一维随机场的关系，并得出如下结论：

$$\begin{cases} C^{(3)}(h) = \dfrac{1}{h}\int_0^h C^{(1)}(x)dx \\ C^{(1)}(h) = \dfrac{d}{dh}(hC^{(3)}(h)) \end{cases} \tag{7.3.10}$$

而对于二维随机场与一维随机场之间的这种关系，Brooker（1985）也做了类似推导，得出以下结论：

$$\begin{cases} C^{(2)}(h) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi C^{(1)}(h\cos\theta)d\theta \\ C^{(1)}(t) = C^{(2)}(0) + \int_0^t t(t^2 - h^2)^{-1/2}\dfrac{d}{dh}[C^{(2)}(h)]dh \end{cases} \tag{7.3.11}$$

知道一维协方差后实现随机场则较为简单，比如可采用后面介绍的矩阵分解法。

（2）一维随机场实现的谱方法

还可以采用 Shinozuka 与 Jan (1972)所介绍的谱密度方法来反推协方差之间的关系（转动带程序即是采用此种方法）。由于谱密度函数与协方差函数之间存在傅里叶变换与反变换的关系，即

$$\begin{cases} C(\mathbf{r}) = \int S(\omega)e^{i\omega\cdot\mathbf{r}}d\omega \\ S(\omega) = \dfrac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} C(\mathbf{r})^{-i\omega\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r} \end{cases} \tag{7.3.12}$$

而由上知，协方差和谱密度函数都为偶函数，则有

$$\begin{cases} C(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega\cdot\mathbf{r}}d\omega = 2\int_0^\infty S(\omega)\cos(\omega\mathbf{r})d\omega \\ S(\omega) = \dfrac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} C(\mathbf{r})\cos(\omega\mathbf{r})d\mathbf{r} \end{cases} \tag{7.3.13}$$

于是可根据上式由协方差函数推出相应的谱密度函数。Mantoglou（1982）曾对各种协方差模型都做出了推导。如指数模型：

$$C(\mathbf{r}) = \sigma^2 e^{-\mathbf{r}/a} \tag{7.3.14}$$

相应的谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega b^2}{[1+(\omega b)^2]^{3/2}} \tag{7.3.15}$$

由二维或三维的谱密度推出一维的谱密度，继而完成一维的随机场实现。一维谱密度的计算式为

二维：$S_1^i(\omega) = \pi\omega S(\omega\cos\theta_i, \omega\sin\theta_i)$ (7.3.16)

三维：$S_1^i(\omega) = 2\pi\omega^2 S(\omega\cos\theta_i\sin\varphi_i, \omega\sin\theta_i\sin\varphi_i, \omega\cos\varphi_i)$ (7.3.17)

式中：i 为转动带序号，各角度定义同上。得出一维谱密度后，一维随机场实现则为：

$$Z_i(\xi)=2\sum_{k=1}^{M}(S_1^i(\omega_k)\Delta\omega)^{1/2}\cos(\omega_{k1}\xi+\phi_k) \tag{7.3.18}$$

式中：ϕ_k 为均匀分布于$[0,2\pi]$中的随机相位角，$\omega\in[-\Omega,\Omega]$，取步长 $\Delta\omega=\Omega/M$，则有 $\omega_k=(k-0.5)\Delta\omega$，$\omega_{k1}=\omega_k+\delta\omega$，$\delta\omega$ 为避免周期重复而人为加入的一个随机扰动，其值均布于[-ε/2, ε/2]之间，ε为可自行指定，但应远小于 $\Delta\omega$。

一维随机场实现后，则可根据式(7.3.6)很容易得出多维随机场的实现。

（二） 基于 Karhunen-Loève 分解的随机场模拟方法

Karhunen-Loève(KL)展开方法实现随机场相对其他方法来说主要有以下几个优点：首先，对于二阶平稳随机场来说，KL 展开法实现随机场可以得到最小的统计矩均方误差；其次，当所需实现随机场为高斯场时，可以将随机场的实现化为一组高斯随机向量的实现，而后者操作上也比较容易；最后，采用 KL 展开方法来实现随机场，实现值的统计矩一般都可以保证收敛。

然而，KL 展开法也有一定的局限性，即当随机场的相关长度较小时，KL 展开截断项数便会很大，即需要实现更多的随机变量（参见下文），这样实现起来就很困难，且带入了很多的不确定性。

（1）Karhunen-Loève 展开

对于随机场 $\omega(x,\theta)$ 通过 Karhunen-Loève 展开进行分解得

$$\omega(x,\theta)=\langle\omega(x,\theta)\rangle+\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}f_i(x)\xi_i(\theta) \tag{7.3.19}$$

式中：$\xi_i(\theta)$ 为独立随机变量；x 为定义于空间域 D 的坐标向量；θ 属于随机事件域的变量，表征空间同一位置点不同试验条件下的取值；$\langle\omega(x,\theta)\rangle$ 为集平均值；λ_i 和 $f_i(x)$ 分别为待求解的特征值和特征函数，且特征函数应满足正交性质，即为

$$\int_D f_n(x)f_m(x)dx=\delta_{nm} \tag{7.3.20}$$

这样，通过式(7.3.19)来实现随机场，则可将随机场进行变量分离，即用特征函数值来表征空间变异性，用 $\xi_i(\theta)$ 来表征随机特性。通过这两个变量的组合来表征整体的随机场的特性。

设该随机场的实现值关于空间坐标的协方差为 $C(x_1,x_2)$，该协方差有着谱展开形式如下：

$$C(x_1,x_2)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i f_i(x_1)f_i(x_2) \tag{7.3.21}$$

上式两边同时乘以 $f_n(x_1)$，并在整个空间域 D 对 x_1 进行积分，由正交函数性质即式(7.3.20)，

则有

$$\int_D C(x_1, x_2) f_n(x_1) dx_1 = \lambda_n f_n(x_2) \tag{7.3.22}$$

即对于每个特征值及其对应的特征函数均满足以上积分方程，求解以上方程，则可以得出所有的特征值及特征函数。

对于给定的随机场，需要预先知道随机场的一阶和二阶矩或分布规律，求解式(7.3.22)或可以得到该随机场的特征值和特征函数序列，当所需实现的随机场为高斯场时，式(7.3.19)中$\xi_i(\theta)$是正态随机变量，可以通过很多的方法得到。因此，即可通过该分解完成随机场的实现。

（2）特征函数和特征值的求解

1） 解析方法

根据地质统计学理论的研究经验，取协方差函数为指数模型

$$C(x_1, x_2) = \sigma^2 e^{-|x_1 - x_2|/b} \tag{7.3.23}$$

式中：b 为相关长度；σ^2 为参数方差，为已知参数。

将式(7.3.23)代入(7.3.22)，得

$$\int_0^a \sigma^2 e^{-|x_1 - x_2|/b} f_n(x_1) dx_1 = \lambda_n f_n(x_2) \tag{7.3.24}$$

将上述积分式子对 x_2 求导，则可以得到以下微分方程：

$$\frac{\lambda}{\sigma^2} f'(x_2) = -\frac{1}{b}\int_0^{x_2} \sigma^2 e^{(x_1 - x_2)/b} f(x_1) dx_1 + \frac{1}{b}\int_{x_2}^{L} \sigma^2 e^{(x_2 - x_1)/b} f(x_1) dx_1 \tag{7.3.25}$$

上式两边再对 x_2 求导，有

$$\lambda f''(x) = \frac{\lambda - 2\sigma^2 b}{b^2} f(x) \tag{7.3.26}$$

引入一个新的变量 w，令

$$w^2 = \frac{2\sigma^2 b - \lambda}{b^2 \lambda} \tag{7.3.27}$$

则式(7.3.26)可化简为

$$f''(x) + w^2 f(x) = 0 \quad 0 \le x \le a \tag{7.3.28}$$

该微分方程显然有以下解的形式

$$f(x) = a_1 \cos(wx) + a_2 \sin(wx) \tag{7.3.29}$$

分别令 $x = 0, x = a$，则由式(7.3.25)，有以下边界条件：

$$\begin{cases} bf'(0) = f(0) \\ bf'(a) = -f(a) \end{cases} \tag{7.3.30}$$

将特征函数表达式，即方程(7.3.29)带入以上边界条件，有以下式子：

$$\begin{cases} a_1 - b\omega a_2 = 0 \\ [\cos(\omega a) - \omega b \sin(\omega a)]a_1 + [\omega b \cos(\omega a) + \sin(\omega a)]a_2 = 0 \end{cases} \tag{7.3.31}$$

若要使该齐次线性方程组有非零解，则其系数行列式必为零，有：

$$(b^2\omega^2 - 1)\sin(2\omega a) = 2b\omega\cos(2\omega a) \tag{7.3.32}$$

求解该方程可得无穷个正根ω_i，由式(7.3.27)可得出相应的特征值λ_i。

$$\lambda_i = \frac{2b\sigma^2}{b^2\omega_i^2 + 1} \tag{7.3.33}$$

将所得λ_i排序，得到单调递减的特征值序列。根据不同的λ_i值得出不同的特征函数，特征函数具有以下解的形式：

$$f_i(x) = \alpha_i \cos(\omega_i x) + \beta_i \sin(\omega_i x) \tag{7.3.34}$$

其中，系数α_i，β_i随ω_i不同而不同，根据特征函数正交性质可求的，于是特征函数也可解得：

$$f_i(x) = \frac{b\omega_i \cos(\omega_i x) + \sin(\omega_i x)}{\sqrt{(b^2\omega_i^2 + 1)a/2 + b}} \tag{7.3.35}$$

由于单调递减的特征值序列靠前的各项递减非常快，之后趋于平缓，且令方程(7.3.24)中x_1=x_2=x，并将方程两端在研究域上关于x求积分，则有：

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \sigma^2 \int_D dx = \sigma^2 a \tag{7.3.36}$$

式中：a为区域长度、面积或体积，分别对应1维、2维及3维情况。为分析其递减速度，定义变量特征值累加值γ：

$$\gamma = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i / \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i / \sigma^2 a \tag{7.3.37}$$

当M足够大时，γ趋近于1，则包含越完整的随机性质，当取定截断项数M后，就可采用有限项级数展开来代替无穷级数展开：

$$\omega(x,\theta) = \langle \omega(x,\theta) \rangle + \sum_{i=1}^{M} \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \xi_i(\theta) \tag{7.3.38}$$

对于二维随机场，协方差函数则为$C(x,y) = \sigma^2 e^{-|x_1 - x_2|/b_1} e^{-|y_1 - y_2|/b_2}$，根据协方差函数可分离性，即可依据分离变量法，分别在x，y两个方向上求解方程，得到二维情况下的特征值和特征函数，其后直接相乘即可，即：

$$\lambda_i = \frac{4b_1 b_2 \sigma^2}{(b_1^2\omega_{i,1}^2+1)(b_2^2\omega_{i,2}^2+1)} \tag{7.3.39}$$

$$f_i(x) = \frac{b_1\omega_{i,1}\cos(\omega_{i,1}x_1)+\sin(\omega_{i,1}x_1)}{\sqrt{(b_1^2\omega_{i,1}^2+1)a_1/2+b_1}}\frac{b_2\omega_{i,2}\cos(\omega_{i,2}x_2)+\sin(\omega_{i,2}x_2)}{\sqrt{(b_2^2\omega_{i,2}^2+1)a_2/2+b_2}} \tag{7.3.40}$$

三维的也可依此类推。

2）数值解法

当协方差函数表达式较为复杂（如条件模拟）或者定义在不规则区域，不能用以上解析方法求解时，可采用数值方法求解积分方程(7.3.22)，如史良胜（2005）等采用的 Galerkin 有限元方法，其过程如下:

对于二维情况，将 D 离散为有 T 个三角形单元 L 个节点的网格。特征函数 f 在某三角形单元 e 三个节点上的值依次为 f_i, f_j, f_k。在该单元内特征函数的近似表达式：

$$\tilde{f}(x,y) = \sum_{p=i,j,k} \phi_p(x,y) f_p \tag{7.3.41}$$

式中：$\phi_p(x,y)$ 为单元 e 上的线性插基函数。将协方差简单记为 C，则式（7.3.22）有二维形式的 Galerkin 方程如下：

$$\sum_{e=1}^{T}\int_{D_e}\left[\int_D Cf(x,y)dD\right]\phi_n dD_e = \sum_{e=1}^{T}\sum_{p=i,j,k}\int_{D_e}\lambda\phi_p\phi_n dD_e \tag{7.3.42}$$

将上式写成一下方程组形式为

$$[A]\{F\} = \lambda[B]\{F\} \tag{7.3.43}$$

其中，$A_{pn} = \sum_{e=1}^{T}\int_{D_e}[\int_D C\phi_p\phi_n dD]dD_e$ 采用高斯型求积分方法求出。

$$B_{pn} = \int_{D_e}\phi_p\phi_n dD_e \qquad p = i,j,k; n = 1,2,\cdots,L$$

对于式(7.3.42)，若 B 非奇异，则有

$$[B]^{-1}[A]\{F\} = \lambda\{F\} \tag{7.3.44}$$

为标准矩阵特征值问题，可以通过 QR 算法求解。

（三） 矩阵分解法

矩阵分解法也称 LU 分解法，将协方差矩阵直接经过 LU 分解，再经过转化得出随机场的实现值。具体对于某空间网格，若共有 n 个节点的某个参数待模拟，认为参数为二阶平稳场，且协

方差函数已知，则协方差矩阵必为对称正定矩阵，且对角占优。根据对称矩阵的性质，可以采用cholesky 方法将该矩阵进行 LU 分解，得出一个下三角矩阵 **L** 和与 **L** 对称的上三角矩阵 **U**，即

$$C = L \cdot U \tag{7.3.45}$$

生成一个向量 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)^{\mathrm{T}}$，该向量中各变量相互独立，且均服从标准正态分布，对于变量 **Y**

$$\mathbf{Y} = \mathbf{L}\boldsymbol{\alpha} \tag{7.3.46}$$

该矩阵向量均值为 0，且其协方差函数为

$$\mathbf{C}(\mathbf{Y}) = \mathrm{E}[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}] = \mathbf{L} < \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} > \mathbf{U} = \mathbf{L}\mathbf{I}\mathbf{U} = \mathbf{C} \tag{7.3.47}$$

虽然生成向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 较为简单，且该方法与维数没有直接关系，仅与点数相关，但该方法涉及较多矩阵运算，当点数很多时，矩阵很大且运算效率及运算精度均不够好，故该方法适用于空间变异性小模拟点数较少的区域。如当节点数为 N 时，协方差矩阵 **C** 元素则为 $N \times N$ 个，占存储空间大，会带来很多其他问题。

二、 地下水运动问题的模拟步骤和随机函数的统计矩

对于饱和地下水渗流问题，控制方程可写为

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial H}{\partial y}\right) + f \tag{7.3.48}$$

式中：K 为含水层饱和水力传导度；μ 为给水度；H 为地下水水头；f 为源汇项，包括地下水的入渗、蒸发和地下水的开采。式（7.3.48）的定解条件可写为

$$\begin{aligned} & H(x,y,t)\big|_{t=0} = H_0(x,y) \\ & H(x,y,t)\big|_{(x,y)\in\Gamma_1} = H_1(x,y,t) \\ & -\left(K\frac{\partial H}{\partial x}n_x + K\frac{\partial H}{\partial y}n_y\right)_{(x,y)\in\Gamma_2} = Q(x,y,t) \end{aligned} \tag{7.3.49}$$

式中：H_0 为起始水头分布；H_1 为在一类边界 Γ_1 上的水头值；Q 为在二类边界 Γ_2 上的流量值；n_x、n_y 为边界的外法向余弦。由于 K、μ、f、H_0、H_1、Q 都可能是空间随机函数，（7.3.48）和（7.3.49）为一组描述地下水运动的随机偏微分方程，得到的方程的解 H 也是一个空间随机函数。利用蒙特卡罗方法求解（7.3.48）～（7.3.49）的步骤为：

1）根据随机函数 K（ω，x，y）、μ（ω，x，y）、f（ω，x，y）、H_0（ω，x，y）、H_1（ω，x，y）、Q（ω，x，y）的统计特征和各随机函数的相关关系，利用 7.3.1 节所述方法得到随机函数的一个实现 K（x，y）、μ（x，y）、f（x，y）、H_0（x，y）、H_1（x，y）、Q（x，y），这个实现即为各随机函数在空间的分布，是一个确定性函数。这时，随机偏微分方程（7.3.48）-（7.3.49）为一组确定性偏微分方程。

2）利用任何已有的数值方法（如，有限元或有限差）求解所得到的确定性模型，得到该实现

条件下水头在空间离散点上的值 H_{ij}^{k}（t）。其中（i，j）表示离散节点的编号，k 为形成随机场实现的编号。

3）对于得到的离散点水头值 H_{ij}^{k}（t）进行统计分析，得到水头的统计特征参数（主要包括水头均值、方差和协方差等）。

水头均值可利用下式估计：

$$\left\langle H_{ij}(t)\right\rangle=\frac{1}{N_k}\sum_{k=1}^{N_k}H_{ij}^{k}(t) \tag{7.3.50}$$

式中：N_k 是对于随机场（K、μ、f、H_0、H_1、Q）所形成实现的总次数。

水头方差可利用下式估计：

$$\sigma_H^2=\frac{1}{N_k-1}\sum_{k=1}^{N_k}\left(H_{ij}^{k}(t)-\left\langle H_{ij}(t)\right\rangle\right)^2 \tag{7.3.51}$$

三、 吸附性溶质在非饱和土壤中运移的蒙特卡罗模拟

在第一节（二）中我们已经了解到非饱和土壤具有比较严重的空间变异特征，即便是在较小的研究范围内，土壤水力传导度和介质形状参数 α 变化较剧烈。不仅非饱和土壤水力参数具有非均匀性，而且这些参数既依赖于土壤特性又依赖于土壤含水量。由于这些复杂性，在非饱和情况下，具有空间变异的土壤参数对溶质弥散度的影响还知之甚少，对于物理和化学性质随空间变化的非饱和土壤中，反应性溶质运移的研究是具有挑战性的研究课题。这些研究成果对于污染土壤的处理、加油站附近土壤汽油等污染物的风险控制和治理具有重要的意义。本节主要讨论水力传导度、溶质吸附系数和土壤含水量随空间变化时，在非饱和介质中表观（宏观）弥散度的数值研究结果。由于土壤介质参数、土壤吸附参数和非饱和水分运动特征的随机性和不确定性，我们主要通过各种类型参数的耦合实现，产生耦合的随机场，利用蒙特卡罗随机模拟方法，研究溶质的分布特征和弥散特征。我们假定，与对流的时间尺度相比，溶质与介质的相互作用时间很短，因此，我们可用等温吸附模型来表征地下水流中的污染物浓度与介质固体浓度之间的局部平衡关系，这里只限于线性等温吸附。即使是在这种简单的平衡吸附条件下，当溶质是在等温吸附参数随空间变化的介质中运移时，运移过程也变得相当复杂，我们用数值模拟的方法评估了非均匀水动力性质和反应性化合物条件下的饱和弥散度(Yang et al., 1996)。

（一） 非饱和水分运动和溶质运移方程

非饱和水流运动可用传统的 Richard 方程描述，对于二维水流动问题，运动方程可以写为

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[K\frac{\partial h}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K\frac{\partial h}{\partial z}\right]+\frac{\partial K}{\partial z} \tag{7.3.52}$$

式中：θ 为体积含水量；t 为时间；K 为非饱和水力传导度；h 为压力水头；x 是水平坐标；z 为

垂直坐标，z 取向上为正。

溶质运移可用经典的对流-弥散方程来描述，对于非饱和土壤中的吸附性溶质，对流弥散方程为

$$\frac{\partial \theta C}{\partial t}+\rho\frac{\partial C_s}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\theta D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}\right]-\frac{\partial}{\partial x_i}[\theta V_i C],\quad i,j=1,2 \tag{7.3.53}$$

式中：C 是液相中溶质的浓度；C_s 是吸附溶质的浓度；ρ是土壤容重；V_i 是土壤水流速在 x_i 方向的分量，D_{ij} 是实验室尺度的弥散系数张量的第（i, j）个分量，可以表示为

$$D_{ij}=\alpha_T\,|V|\,\delta_{ij}+(\alpha_L-\alpha_T)\frac{V_iV_j}{|V|}+D_d\tau\delta_{ij} \tag{7.3.54}$$

式中：α_L、α_T 为孔隙尺度纵向和横向弥散度；$|V|=(V_x^2+V_z^2)^{1/2}$ 为孔隙流速的模；D_d 为溶质在自由水体中的离子或分子扩散系数；τ为孔隙的弯曲率因子。当方程用于垂直剖面二维问题时，取 $x_1 = x$ 作为水平坐标，取 $x_2 = z$ 作为垂直坐标。在式（7.3.53）和（7.3.54）中，用了求和的惯例。考虑线性均衡吸附问题，均衡吸附等温线可表示为

$$C_s(x,z,t)=K_d(x,z)C(x,z,t) \tag{7.3.55}$$

式中：$K_d\,(k, x)$是吸附系数，是一个空间随机函数。

（二） 土壤水力特性和化学吸附特性的空间变异性

采用空间随机场来模拟控制运移过程的参数的空间变异性，溶质运移主要受到非饱和传导度 $K(h)$和水分特征曲线的控制，这些水力特性可用 van Genuchten (1980)的解析表达式(7.1.29)来描述。

假定 K_s 和 β 为二阶平稳空间随机函数的实现，其协方差函数具有以下形式：

$$\begin{aligned}C_P(\mathrm{h})&=\langle P'(\mathrm{r+h})P'(\mathrm{r})\rangle\\&=\sigma_P^2\exp\left\{-\left[\left(\frac{h_{px}}{I_{px}}\right)^2+\left(\frac{h_{pz}}{I_{pz}}\right)^2\right]^{1/2}\right\}\end{aligned} \tag{7.3.56}$$

式中：P 表示 $\ln K_s$ 和 $\ln\beta$；$P' = P - \langle P\rangle$是 P 对于均值$\langle P\rangle$的波动值；I_{px} 和 I_{pz} 为 P 在 x 和 z 方向的相关长度；σ_p^2 是 P 的方差；h 是分量为 h_{px} 和 h_{pz} 的分离距离矢量；r 为空间位置。假设 K_s 和 β 之间的相关很弱，可以看作两个相互独立的随机函数。

采用均衡等温线并假定吸附系数为空间随机函数，为了简化吸附系数 K_d 的空间变异性，使用了与 K_s 相似的对数正态分布，考虑 $\ln K_s$ 与 $\ln K_d$ 最简单的相关问题，当 $\ln K_s$ 与 $\ln K_d$ 统计上不相关时，K_d 可表示为

$$K_d(x,z) = K_d^G \exp[N(x,z)] \tag{7.3.57}$$

式中：K_d^G 是 K_d 的几何平均值，$N(x, z)$为零均值二阶平稳正态分布随机函数，方差为σ_d^2。如果 $\ln K_d$ 与 $\ln K_s$ 是线性相关时，K_d 可表示为

$$K_d(x,z) = K_d^G \exp[\beta Y'(x,z)] \tag{7.3.58}$$

式中：$Y'_{(x,z)} = Y_{(x,z)} - < Y_{(x,z)} >$ 是 $\ln K_s$ 相对于均值的偏离值，如果 $\ln K_d$ 与 $\ln K_s$ 是正相关时，$\beta = 1$，负相关时，$\beta = -1$。

（三） 统计分析方法

溶质运移和扩散的统计特征可采用计算浓度分布的零至二阶矩的方法分析，零阶空间矩表示整个系统中溶质的质量，即

$$m = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x,z,t)C(x,z,t)dx\,dz \tag{7.3.59}$$

一阶矩表示浓度分布质量中心的坐标

$$\begin{aligned} x_c(t) &= \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x,z,t)C(x,z,t)x\,dx\,dz \\ z_c(t) &= \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x,z,t)C(x,z,t)z\,dx\,dz \end{aligned} \tag{7.3.60}$$

因此运移的平均速度可表示为

$$< V_x >= \frac{dx_c(t)}{dt}, \qquad < V_z >= \frac{dx_c(t)}{dt} \tag{7.3.61}$$

相对于溶质分布质量中心的二阶空间矩表征了溶质空间分布的分散程度，这些二阶矩可表示为

$$\begin{aligned} M_{xx}(t) &= \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x,z,t)C(x,z,t)(x-x_c)^2\,dx\,dz \\ M_{xz}(t) = M_{zx}(t) &= \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x,z,t)C(x,z,t)(x-x_c)(z-z_c)\,dx\,dz \\ M_{zz}(t) &= \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x,z,t)C(x,z,t)(z-z_c)^2\,dx\,dz \end{aligned} \tag{7.3.62}$$

宏观弥散系数张量 D 可以由二阶空间矩来确定（Burr et al., 1994）

$$D = \frac{< R >}{2}\frac{d\mathbf{M}}{dt}, \ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xz} \\ M_{zx} & M_{zz} \end{bmatrix} \tag{7.3.63}$$

这里$\langle R\rangle$是滞后因子，当沿 z 方向的平均流速为常数时，宏观弥散度可表示为

$$A_{zz} = \frac{1}{2}\frac{dM_{zz}}{dz_c} \tag{7.3.64}$$

（四） 蒙特卡罗数值模拟

非饱和水流的数值模拟中，考虑如下条件下的二维垂直剖面问题：在土壤表面保持常入渗水量或常水头压力。在土壤剖面底部保持自由排水或压力水头分布，两侧为不透水边界，模拟的空间区域为 3 m × 6 m。剖面网格的大小使得在一个相关尺度范围内含有 4 个节点分布（Bellin et al., 1993），模拟中所用的网络节点数为 61 × 121 个，由于所用的 $\ln K_s$ 的相关尺度为 0.25 m，计算区域在水平和垂直方向上分别包括了 12 和 24 个相关尺度。

对于溶质运移模拟，起始时刻在研究区域内具有均匀分布溶液浓度，在该区域之外，浓度则为零。地表为溶质通量边界，底部为零浓度梯度边界，土壤剖面两侧为零通量边界条件。

表 7.4 中列出了数值模拟中所采用的物理和化学参数。用转动带法来产生空间变异参数的随机场。为了获得非饱和水力传导度的随机场，在所研究空间的 61 × 121 个节点上独立地产生饱和水力传导度和参数 β 的随机场。经检验产生的参数随机场计算的几何平均值、方差和相关尺度值与表 7.4 中输入的参数值很接近。

在相同的定解条件下，对 β 和 K_s 的随机场的 20 个实现进行了数值模拟，其中 10 个模拟使用一个固定的α实现和 10 个 K_s 的不同实现，另外 10 个模拟使用一个固定的 K_s 实现和 10 个 β 的不同实现。对得到的土壤水分中溶质的浓度和土壤含水量利用式（7.3.60）~（7.3.64）研究和分析浓度的随机分布特征。

表 7.4 数值模拟所采用的参数

参数	取 值
饱和含水量，θ_s	0.4
残余含水量，θ_r	0.05
平均饱和水力传导度，K_s	1.0 m/d
土壤特征曲线中参数 β 的均值	1.0 1/m
土壤特征曲线中指数参数, n	2
平均吸附系数，K^{G}_{d}	0, 0.2, 0.6 cm^3/g
土壤容重，ρ	1.4 g/cm^3
纵向弥散度，α_L	0.01 m
横向弥散度，α_T	0.01 m
$\ln K_s$ 的方差，$\sigma^2_{\ln Ks}$	0.25
$\ln\alpha$的方差，$\sigma^2_{\ln\alpha}$	0.25
$\ln K_s$ 的相关尺度	0.25 m
$\ln\alpha$的相关尺度	0.25 m

（五） 模拟结果分析

（1）浓度分布的空间矩和宏观弥散度

图 7.2a 为对于 20 个不同实现的二阶矩 M_{zz} 和 M_{xx} 的集平均结果，也显示了其 95%的置信区间，图 7.2b 对于宏观弥散系数也呈现出类似的结果。从图 7.2a 可见，水流方向的空间矩 M_{zz} 远大于垂直于水流方向的矩值 M_{xx}。在饱和与非饱和土壤中，溶质的扩散主要是由水流速的局部变化引起的，因此在水流方向上的速度及其方差要比在垂直于水流方向的大得多，并且，对于不同的实现，水流方向上的二阶矩 M_{zz} 显著的不同，并且 M_{zz} 与集平均的偏差随时间增加（图 7.2a）。

宏观弥散度 M_{zz} 在起始阶段随时间逐渐增大，而后，集平均值逐渐趋近于一常数值。垂直于水流方向的宏观弥散度 D_{xx} 比 M_{zz} 小得多（图 7.2b），事实上，D_{xx} 基本保持为实验室尺度的弥散度。

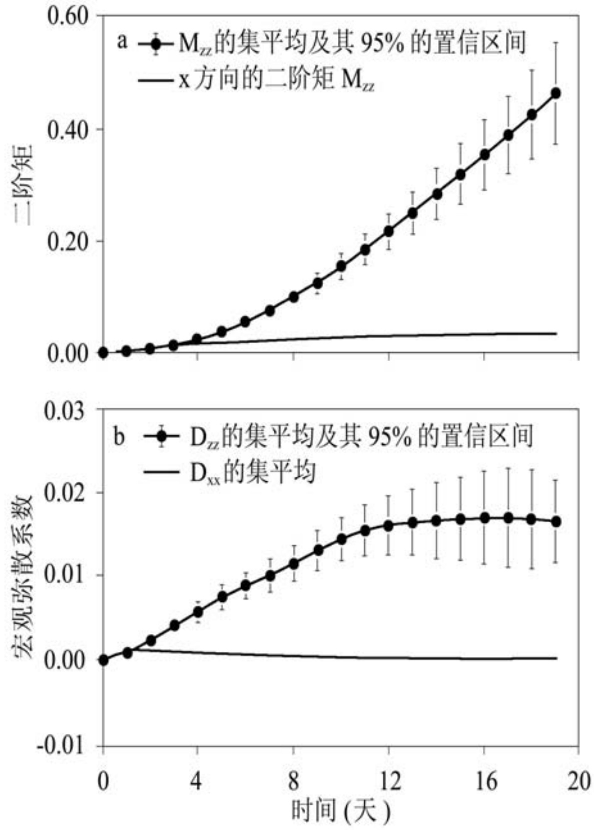


图 7.2 浓度二阶中心矩的集平均（a）与根据空间矩计算的宏观弥散系数（b）

（2）土壤含水量对溶质扩散的影响

图 7.3a 和 b 显示在平均土壤含水量$\langle\theta\rangle = 0.35, 0.30$ 和 0.26 时，溶质浓度的二阶矩以及宏观弥散度随溶质运移距离的变化，这些图代表在每一个含水量情况下，根据非饱和水力传导度的四个实现来模拟所得的集平均。图 7.3 显示，二阶矩 M_{zz} 和宏观弥散度 A_{zz} 随含水量的减少而增加，这一结果可通过$\langle\theta\rangle$对于土壤孔隙流速的影响来解释。在饱和与非饱和水流中，弥散是随土壤孔隙流速的变异性而增加的，在饱和水流中，孔隙流速的变异性主要来自于饱和传导度的变异性，然而，在非饱和土壤中，孔隙流速的变异性既来自于非饱和水力传导度的变异性，又来自于土壤含水量的变异性，这两种变异性都随土壤含水量的减少而增加。

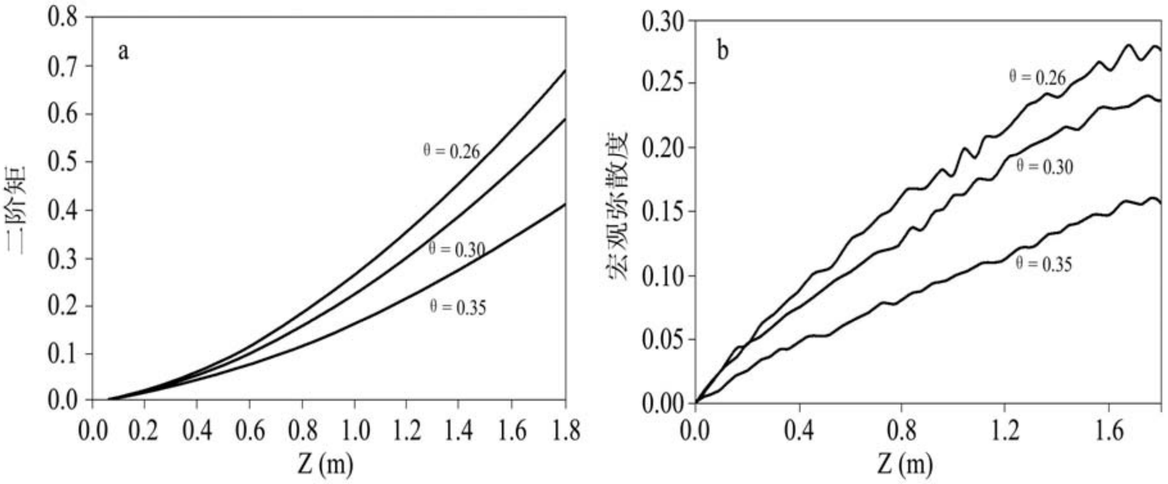


图 7.3　平行水流方向的二阶矩（a）及宏观弥散度与溶质运移距离的关系（b）

（3）吸附系数对溶质扩散的影响

对于线性等温吸附，滞后因子 $R = 1+\rho K_d/\theta$表示溶质吸附性对运移速度的这一影响，吸附溶质的有效运移速度小于非吸附溶质的运移速度。在含水量θ 和 R 为常数的情况下，通过引入新的时间变量 $t_R = tR$，就可将具有溶质吸附作用的对流弥散方程转化为传统的非吸附对流弥散方程，这种转换表明吸附性溶质运移的速度是非吸附溶质的 $1/R$ 倍，当 K_d 和θ为随机函数时，溶质的平均吸附因子可以通过吸附性溶质和相应的非吸附溶质的一阶矩求解。

图 7.4a 和 b 所示的结果是二阶 M_{zz}和宏观弥散度 A_{zz}，显然 M_{zz}和 A_{zz}都随吸附系数 $K^{\mathrm{G}}{}_{\mathrm{d}}$的增加而增加。

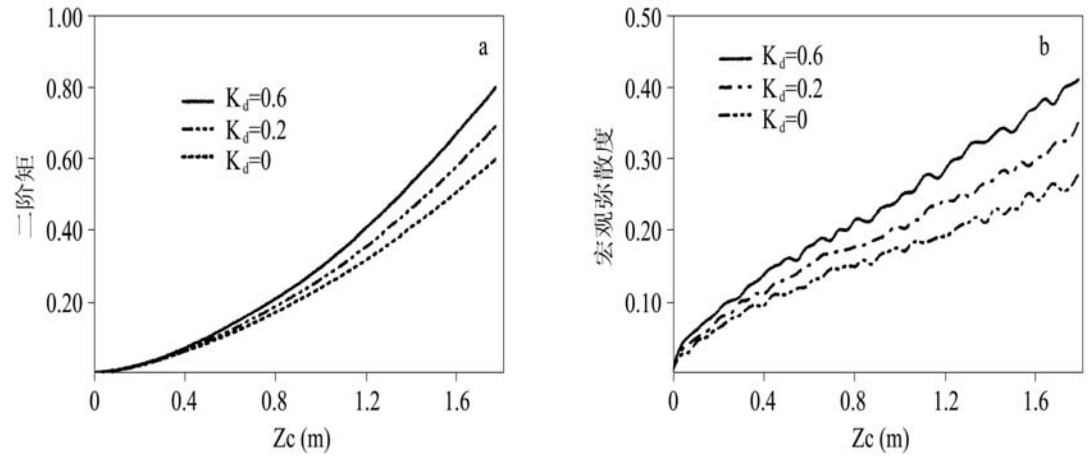


图 7.4　平行水流方向的二阶矩（a）与宏观弥散度（b）

（4）相关结构对溶质扩散的影响

由于缺少 K_d和 K_s之间相关关系的实验数据和理论分析结果，在模拟中所用的不相关、正相关和负相关代表了这两个变量之间的极端情况。模拟结果显示（图 7.5），如果 $\ln K_d$和 $\ln K_s$是负相关，就会提高二阶矩和宏观弥散度随距离而变化的程度，相反，当 $\ln K_d$和 $\ln K_s$呈正相关时，溶质的扩散就会减慢。这一现象具有下面的物理意义：当 $\ln K_d$和 $\ln K_s$负相关时，在土壤中具有较大水力传导度的位置吸附系数较小（或较小的滞后因子），因而在这些点溶质的运移速度就很大，相反，

在传导度小的位置就会具有较大的吸附系数，这样溶质运移速率就很小。因此，$\ln K_d$ 和 $\ln K_s$ 负相关会增强溶质运移速度的变异性，所以导致弥散度的增加。

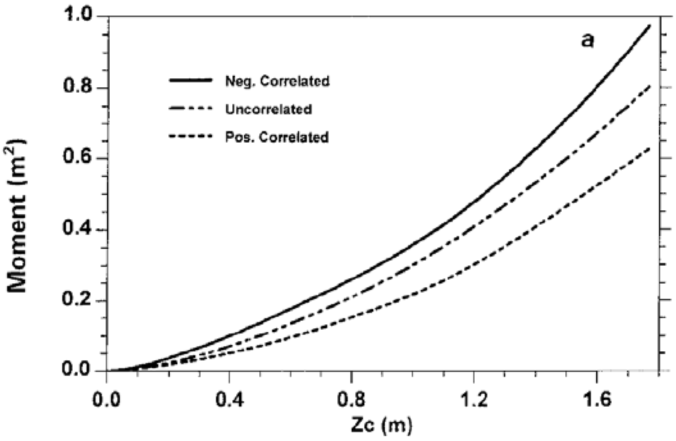


图 7.5　K_d 和 K_s 之间相关结构对于溶质二阶矩的影响

第四节　地下水运动随机问题的 Karhunen-Loève 展开模型

一、 Karhunen-Loève 展开

设 $\psi_i(\mathbf{x})$ 相互正交构成完备集，确定性的或随机的空间函数 $U'(\mathrm{x})$ 可以展开为广义 Fourier 级数的形式，

$$U'(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i(\mathrm{x}) \tag{7.4.1}$$

基函数 $\psi_i(\mathbf{x})$ 可根据如下准则标准正交化，

$$\int_\Omega \psi_i(\mathrm{x})\psi_j(\mathrm{x}) d\mathrm{x} = \delta_{ij} \tag{7.4.2}$$

由式(7.4.1)可知展开系数为

$$c_i = \int_\Omega U'(\mathrm{x})\psi_i(\mathrm{x}) d\mathrm{x} \tag{7.4.3}$$

如果 $U'(\mathrm{x})$ 为随机空间函数，展开系数 c_i 就是随机系数。不失一般性，我们讨论零均值即 $\langle U'(\mathrm{x})\rangle = 0$ 的随机场。

如果随机展开系数具有性质，

$$\langle c_i c_j \rangle = \begin{cases} \chi_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{7.4.4}$$

那么基函数就会满足如下积分方程，

$$\int_{\Omega} C(\mathrm{x},\mathrm{y})\psi_i(\mathrm{y})dy = \chi_i\psi_i(\mathrm{x}) \tag{7.4.5}$$

式中：$C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$为空间随机场$U'(\mathrm{x})$的协方差函数。这个较容易证明，利用式(7.4.1)有

$$\left\langle U'(\mathrm{x})c_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty}\left\langle c_j c_i \right\rangle \psi_j(\mathrm{x}) = \chi_i\psi_i(\mathrm{x})$$

又由式(7.4.3)可知，

$$\left\langle U'(\mathrm{x})c_i \right\rangle = \int_{\Omega}\left\langle U'(\mathrm{x})U'(\mathrm{y})\right\rangle \psi_i(\mathrm{y})d\mathrm{y} = \int_{\Omega} C(\mathrm{x},\mathrm{y})\psi_i(\mathrm{y})d\mathrm{y}$$

由此可见式(7.4.5)成立。

如果正交基函数满足积分方程(7.4.5)，那么

$$\begin{aligned}\left\langle c_i c_j \right\rangle &= \left\langle \int_{\Omega} U'(\mathrm{x})\psi_i(\mathrm{x})d\mathrm{x}\int_{\Omega} U'(\mathrm{y})\psi_j(\mathrm{y})d\mathrm{y}\right\rangle \\ &= \int_{\Omega}\int_{\Omega}\psi_i(\mathrm{x})C(\mathrm{x},\mathrm{y})\psi_j(\mathrm{y})d\mathrm{y}d\mathrm{x} \\ &= \int_{\Omega}\chi_i\psi_i(\mathrm{y})\psi_j(\mathrm{y})d\mathrm{y} \\ &= \chi_i\delta_{ij}\end{aligned}$$

这说明随机展开系数是正交的，即式(7.4.4)成立。

由上分析可知，当且仅当$\psi_i(\mathbf{x})$满足积分方程(7.4.5)时，展开系数c_i为正交随机变量。方程(7.4.5)为第二类 Fredholm 积分方程，χ_i和$\psi_i(\mathbf{x})$分别为协方差函数的特征值和特征函数。

由式(7.4.1)可知，

$$\left\langle c_i \right\rangle = \int_{\Omega}\left\langle U'(\mathrm{x})\right\rangle \psi_i(\mathrm{x})d\mathrm{x} = 0$$

$$\begin{aligned}Var[c_i] &= \left\langle \int_{\Omega} U'(\mathrm{x})\psi_i(\mathrm{x})d\mathrm{x}\int_{\Omega} U'(\mathrm{y})\psi_i(\mathrm{y})d\mathrm{y}\right\rangle \\ &= \int_{\Omega}\int_{\Omega}\psi_i(\mathrm{x})C(\mathrm{x},\mathrm{y})\psi_i(\mathrm{y})d\mathrm{x}d\mathrm{y}\end{aligned} \tag{7.4.6}$$

随机变量的方差不为负值，而且根据协方差函数 $C_U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$的定义，它是对称正定的，因此 $\int_{\Omega}\int_{\Omega}\psi_i(x)C(x,y)\psi_i(y)dxdy > 0$。根据积分方程(7.4.5)以及基函数的正交性有，

$$\chi_i = \int_{\Omega}\psi_i(\mathrm{x})\left(\int_{\Omega} C(\mathrm{x},\mathrm{y})\psi_i(\mathrm{y})d\mathrm{y}\right)dx = \int_{\Omega}\int_{\Omega}\psi_i(\mathrm{x})C(\mathrm{x},\mathrm{y})\psi_i(\mathrm{y})d\mathrm{x}d\mathrm{y}$$

由此可见，特征值$\chi_i>0$，并且就是随机展开系数c_i的方差，可以将随机展开系数标准化为，

$$c_i = \sqrt{\chi_i}\,\xi_i \tag{7.4.7}$$

式中，$\{\xi_i\}$是零均值正交随机变量序列，即具有以下性质：

$$\left\langle \xi_i \right\rangle = 0 \qquad \left\langle \xi_i\xi_j \right\rangle = \delta_{ij} \tag{7.4.8}$$

这样我们得到了随机场的 Karhunen-Loève(KL)展开

$$U'(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\chi_i} \psi_i(\mathrm{x}) \xi_i \tag{7.4.9}$$

由于在 KL 展开中，特征值和特征函数总是一起出现，同时考虑到随机场的均值，因而可以将其表示为，

$$U(\mathrm{x}) = \langle U(\mathrm{x}) \rangle + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\chi_i} \psi_i(\mathrm{x}) \xi_i = \langle U(\mathrm{x}) \rangle + \sum_{i=1}^{\infty} U_i(\mathrm{x}) \xi_i \tag{7.4.10}$$

由式(7.4.10)可见，KL 展开的一个重要特征就是将空间随机扰动分解为一系列确定性函数和随机变量的乘积。

由式(7.4.10)可知协方差函数的谱分解，

$$C_U(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i \psi_i(\mathrm{x}) \psi_i(\mathrm{y}) \tag{7.4.11}$$

由式(7.4.11)很容易得到$\sigma_U^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i \psi_i^2(\mathrm{x})$，将该式积分可得，

$$\sigma_U^2 D = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i \tag{7.4.12}$$

式中，D 为研究区域大小，一维、二维和三维情况下分别为长度、面积和体积。

KL 展开有两个重要的性质，即：随机场的有限项 KL 展开的均方误差最小；随机场的 KL 展开唯一。Ghanem 与 Spanos(1991)对此进行了证明，有兴趣的读者可以参考他们的文献。由这两个性质可知，随机场的 KL 展开可以用有限的 M 项来近似，而且这一截断级数展开是最优的，

$$U(\mathrm{x}) = \langle U(\mathrm{x}) \rangle + \sum_{i=1}^{M} \sqrt{\chi_i} \psi_i(\mathrm{x}) \xi_i \tag{7.4.13}$$

如果随机空间函数是高斯场，那么随机变量序列$\{\xi_i\}$形成了一个高斯随机向量，任何$\{\xi_i\}$的子集都是联合高斯分布。既然这些随机变量不相关，由高斯场的性质可知，它们也是相互独立的，由此可得以下关系式，

$$\begin{aligned} &\langle \xi_1, \dots, \xi_{2n+1} \rangle = 0 \\ &\langle \xi_1, \dots, \xi_{2n} \rangle = \sum \prod \langle \xi_i \xi_j \rangle \end{aligned} \tag{7.4.14}$$

在后面的章节中可以看到，式(7.4.14)在推导水流变量的统计矩过程中非常有用。

二、 随机场的混沌展开

对已知相关函数的随机函数，可以采用 Karhunen-Loève 展开，但是，部分随机函数并不能预先知道其相关函数，例如我们可以知道渗透系数随机场的相关函数，但是对于待求的水头分布函数，我们不可能预先知道其相关函数，这时，可以采用随机函数的混沌展开。Winer（1935）率先提出了随机场混沌展开的概念，以 Hermite 多项式为随机空间的基函数可对二阶随机场进行如下形式展开：

$$h(\mathrm{x},t)=H^{(0)}(\mathrm{x},t)+\sum_{i=1}^{\infty}H_i(\mathrm{x},t)\boldsymbol{\Gamma}_1(\xi_i)+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}H_{ij}(\mathrm{x},t)\boldsymbol{\Gamma}_2(\xi_i\xi_j)+ \\ +\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j}H_{ijk}(\mathrm{x},t)\boldsymbol{\Gamma}_3(\xi_i\xi_j\xi_k)+\ldots \tag{7.4.15}$$

式中：$\Gamma_n(.)$是 n 阶混沌多项式，通常采用 Hermite 多项式。沿用 Yang 等(2004)的处理方法，采用 Hermite 多项式分解水头场。因为$\{\Gamma_n(.)\}$中都是($\xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_n$)的多项式，因此可将式(7.4.15)表示为以下形式：

$$h(\mathrm{x},t)=h^{(0)}(\mathrm{x},t)+\sum_{i=1}^{\infty}h_i(\mathrm{x},t)\xi_i+\sum_{i,j=1}^{\infty}h_{ij}(\mathrm{x},t)\xi_i\xi_j+\sum_{i,j,k=1}^{\infty}h_{ijk}(\mathrm{x},t)\xi_i\xi_j\xi_k+\ldots \\ =h^{(0)}(\mathrm{x},t)+h^{(1)}(\mathrm{x},t)+h^{(2)}(\mathrm{x},t)+\ldots \tag{7.4.16}$$

式(7.4.15)和式(7.4.16)仅考虑了一个因子的空间变异性对水头场的影响，当水头受四个不相关随机因子作用时，水头场的二阶混沌展开可表述为

$$h(\mathbf{x},t)=h^{(0)}+h^{(1)}+h^{(2)} \tag{7.4.17}$$

式中,

$$h^{(0)}=h_0 \tag{7.4.18}$$

$$h^{(1)}=\sum_{i=1}^{\infty}\left(h_i^{\xi}\xi_i+h_i^{\eta}\eta_i+h_i^{\varphi}\varphi_i+h_i^{\varsigma}\varsigma_i\right)=\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=1}^{\infty}\left[h_i^{\psi_k}\cdot(\psi_k)_i\right] \tag{7.4.19}$$

$$h^{(2)}=\sum_{k,l=1;k\le l}^{4}\sum_{i,j=1}^{\infty}h_{ij}^{\psi_k\psi_l}(\psi_k)_i(\psi_l)_j \tag{7.4.20}$$

式中：$(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4)=(\xi,\eta,\varphi,\varsigma)$； $h_0, h_i^{\xi}, h_i^{\eta}, h_i^{\varphi}, h_i^{\varsigma}$ 和 $h_{ij}^{\psi_k\psi_l}$ 均为待求未知数。

三、 饱和水流运动的 Karhunen-Loève 展开模型

地下水特别是浅层地下水是非常重要的水资源，具有补给迅速、开采方法简便等优点。近年来，随着工农业快速发展，大面积地下水污染问题在部分地区已经相当严重。因此，合理开发和利用地下水资源、保护地下水环境，已经成为一个重要的主题，而这些都必须建立正确合理的数学模型来预测地下水动态以及污染物对地下水的影响。含水层的一个重要水力特性就是水力传导度，水力传导度在本质上是确定性的，然而较大的空间变异性和缺乏含水层的详细实验资料，使得准确地用确定性的方法对其描述不大可能。如果仅仅采用平均的或恒定的数值来表示水力传导度，那么将无法反映野外试验所观测到的一些重要现象，譬如，弥散系数的尺度效应，地下水开采的风险等问题。随机理论为解决上述问题提供了一个有效途径。本节将水力传导度作为随机场，通过统计量和空间变异结构来刻画其空间变异性，主要是确定水头的概率分布，或者更为实用的

是水头随机场的统计矩，从定量角度来估计介质参数的空间变异性对饱和水流运动的影响。

（一） 摄动方程

饱和多孔介质中的水流运动满足连续性方程和达西定律，

$$S_s \frac{\partial H(\mathrm{x},t)}{\partial t} = -\nabla \mathrm{q}(\mathrm{x},t) + g(\mathrm{x},t) \tag{7.4.21}$$

$$\mathrm{q}(\mathrm{x},t) = -K_s(\mathrm{x})\nabla H(\mathrm{x},t) \tag{7.4.22}$$

初始条件和边界条件如下，

$$\begin{aligned} &H(\mathrm{x},0) = H_{ini}(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \Omega \\ &H(\mathrm{x},t) = H_d(\mathrm{x},t), \quad \mathrm{x} \in \Gamma_D \\ &\mathrm{q}(\mathrm{x},t)\cdot \mathrm{n}(\mathrm{x}) = Q_n(\mathrm{x},t), \quad \mathrm{x} \in \Gamma_N \end{aligned} \tag{7.4.23}$$

式中：S_s为储水率；$H(\mathbf{x},t)$为总水头；$\mathbf{q}(\mathbf{x},t)$为达西流速；$g(\mathbf{x},t)$为源汇项；$K_s(\mathbf{x})$为饱和水力传导度；$H_{ini}(\mathbf{x})$为研究区域 Ω 的初始水头分布；$H_d(\mathbf{x},t)$为 Dirichlet 边界 Γ_D 上的已知水头函数；$Q_n(\mathbf{x},t)$为 Neumann 边界 Γ_N 上的已知流量函数；$\mathbf{n}(\mathbf{x})$为研究区域边界 $\Gamma = \Gamma_D + \Gamma_N$ 的单位外法线向量；$\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)^T$ 为迪卡尔坐标；t 为时间。

为简单起见，我们认为初始条件$H_{ini}(\mathbf{x})$和边界条件$H_d(\mathbf{x},t)$，$Q_n(\mathbf{x},t)$以及储水率S_s都是确定性的常量或函数，同时假定局部水力传导度是各向同性的，这一处理与已有地下水随机分析相同。我们主要考虑水力特性参数的空间变异性，而饱和水力传导度是地下水流系统中最为重要的水文地质参数，而且其空间变异性比其他参数(如孔隙度)要大得多。与已有试验资料和饱和流随机模拟文献一致，认为饱和水力传导度$K_s(\mathbf{x})$是服从对数正态分布的随机场。引入新的变量，

$$f(\mathrm{x}) = \ln K_s(\mathrm{x}) \tag{7.4.24}$$

将对数饱和水力传导度 $f(\mathbf{x})$分解，

$$f(\mathrm{x}) = \langle f(\mathrm{x})\rangle + f'(\mathrm{x}) \tag{7.4.25}$$

式中：$\langle f(\mathbf{x})\rangle$为均值，它是随机场 $f(\mathbf{x})$的无偏估计，在空间上是相对光滑的； $f'(\mathrm{x})$ 为 $f(\mathbf{x})$的围绕均值的随机扰动。由高斯场的性质可知，$f(\mathbf{x})$完全由其均值$\langle f(\mathbf{x})\rangle$和协方差函数 $C_f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \langle f'(\mathrm{x}) f'(\mathrm{y})\rangle$ 表征。

这样，由于饱和水力传导度场的随机性，方程(7.4.21)~(7.4.23)就成为随机偏微分方程，水头$H(\mathbf{x},t)$也是随机场。一般来说，若地下水水流定解问题中控制方程的系数或定解条件中包含随机函数，就可称此定解问题为随机地下水定解问题。

将方程(7.4.22)代入方程(7.4.21)并利用式(7.4.24)可得，

$$
\begin{gathered}
e^{-f(\mathrm{x})}S_s\frac{\partial H(\mathrm{x},t)}{\partial t}=\nabla^2 H(\mathrm{x},t)+\nabla f(\mathrm{x})\cdot\nabla H(\mathrm{x},t)+e^{-f(\mathrm{x})}g(\mathrm{x},t)\\
H(\mathrm{x},0)=H_{ini}(\mathrm{x}),\quad \mathrm{x}\in\Omega\\
H(\mathrm{x},t)=H_d(\mathrm{x},t),\quad \mathrm{x}\in\Gamma_D\\
e^{f(\mathrm{x})}\nabla H(\mathrm{x},t)\cdot \mathrm{n}(\mathrm{x})=-Q_n(\mathrm{x},t),\quad \mathrm{x}\in\Gamma_N
\end{gathered}
\tag{7.4.26}
$$

$H(\mathbf{x},t)$作为水流系统的输出，其随机性依赖于水流系统输入的随机性。在本章的随机分析中，随机场$f(\mathbf{x})$是水流系统随机性的唯一原因。将总水头展开为渐进级数，

$$
H(\mathrm{x},t)=H^{(0)}(\mathrm{x},t)+H^{(1)}(\mathrm{x},t)+H^{(2)}(\mathrm{x},t)+H^{(3)}(\mathrm{x},t)+\ldots \tag{7.4.27}
$$

在此级数展开式中，每一展开项$H^{(p)}(\mathbf{x},t)$的阶数p都是关于$f(\mathbf{x})$的标准差σ_f的，即$H^{(p)}=O(\sigma_f^p)$。

将$e^{-f(\mathrm{x})}$和$e^{f(\mathrm{x})}$用 Taylor 级数展开为

$$
\begin{aligned}
e^{-f(\mathrm{x})}&=\frac{1}{K_G(\mathrm{x})}\left[1-f'(\mathrm{x})+\frac{1}{2}\left[f'(\mathrm{x})\right]^2-\frac{1}{6}\left[f'(\mathrm{x})\right]^3+\ldots\right]\\
e^{f(\mathrm{x})}&=K_G(\mathrm{x})\left[1+f'(\mathrm{x})+\frac{1}{2}\left[f'(\mathrm{x})\right]^2+\frac{1}{6}\left[f'(\mathrm{x})\right]^3+\ldots\right]
\end{aligned}
\tag{7.4.28}
$$

式中：$K_G(\mathrm{x})=e^{\langle f(\mathrm{x})\rangle}$为饱和水力传导度$K_s(\mathbf{x})$的几何平均。

将$H(\mathbf{x},t)$和$f(\mathbf{x})$相关的展开式(7.4.25)、(7.4.27)、(7.4.28)带入方程(7.4.26)有

$$
\begin{aligned}
&\frac{S_s}{K_G(\mathrm{x})}\left\{1-f'(\mathrm{x})+\frac{1}{2}\left[f'(\mathrm{x})\right]^2-\frac{1}{6}\left[f'(\mathrm{x})\right]^3+\cdots\right\}\cdot\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left[H^{(0)}(\mathrm{x},t)+H^{(1)}(\mathrm{x},t)+H^{(2)}(\mathrm{x},t)+H^{(3)}(\mathrm{x},t)+\cdots\right]\\
&\quad=\nabla^2\left[H^{(0)}(\mathrm{x},t)+H^{(1)}(\mathrm{x},t)+H^{(2)}(\mathrm{x},t)+H^{(3)}(\mathrm{x},t)+\cdots\right]\\
&\qquad+\nabla\left[\langle f(\mathrm{x})\rangle+f'(\mathrm{x})\right]\cdot\nabla\left[H^{(0)}(\mathrm{x},t)+H^{(1)}(\mathrm{x},t)+H^{(2)}(\mathrm{x},t)+H^{(3)}(\mathrm{x},t)+\cdots\right]\\
&\qquad+\frac{g}{K_G(\mathrm{x})}\left\{1-f'(\mathrm{x})+\frac{1}{2}\left[f'(\mathrm{x})\right]^2-\frac{1}{6}\left[f'(\mathrm{x})\right]^3+\cdots\right\}
\end{aligned}
\tag{7.4.29}
$$

定解条件如下，

$$
\begin{aligned}
&H^{(0)}(\mathrm{x},0)+H^{(1)}(\mathrm{x},0)+H^{(2)}(\mathrm{x},0)+H^{(3)}(\mathrm{x},0)+\cdots=H_{ini}(\mathrm{x}),\quad \mathrm{x}\in\Omega\\
&H^{(0)}(\mathrm{x},t)+H^{(1)}(\mathrm{x},t)+H^{(2)}(\mathrm{x},t)+H^{(3)}(\mathrm{x},t)+\cdots=H_d(\mathrm{x},t),\quad \mathrm{x}\in\Gamma_D\\
&\left\{1+f'(\mathrm{x})+\frac{1}{2}\left[f'(\mathrm{x})\right]^2+\frac{1}{6}\left[f'(\mathrm{x})\right]^3+\cdots\right\}\cdot\\
&\nabla\left[H^{(0)}(\mathrm{x},t)+H^{(1)}(\mathrm{x},t)+H^{(2)}(\mathrm{x},t)+H^{(3)}(\mathrm{x},t)+\cdots\right]\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x})\\
&\qquad=-\frac{Q_n(\mathrm{x},t)}{K_G(\mathrm{x})},\quad \mathrm{x}\in\Gamma_N
\end{aligned}
\tag{7.4.30}
$$

方程(7.4.29)的左边为

$$
\begin{aligned}
LHS = & \frac{S_s}{K_G}\frac{\partial H^{(0)}}{\partial t} + \\
& \frac{S_s}{K_G}\left[\frac{\partial H^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial H^{(0)}}{\partial t} f'\right] + \\
& \frac{S_s}{K_G}\left[\frac{\partial H^{(2)}}{\partial t} - f'\frac{\partial H^{(1)}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial H^{(0)}}{\partial t}(f')^2\right] + \\
& \frac{S_s}{K_G}\left[\frac{\partial H^{(3)}}{\partial t} - f'\frac{\partial H^{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{2}(f')^2\frac{\partial H^{(1)}}{\partial t} - \frac{1}{6}\frac{\partial H^{(0)}}{\partial t}(f')^3\right] + \cdots
\end{aligned} \tag{7.4.31}
$$

式中，第一项为不包含随机扰动的零阶项，第二项为包含一阶随机扰动的一阶项，第三项为包含二阶随机扰动的二阶项，第四项为包含三阶随机扰动的三阶项。在传统摄动方法中往往只展开到一阶项，其他均称为高阶项。

同样地，方程(7.4.29)的右边展开后得，

$$
\begin{aligned}
RHS = & \nabla\langle f\rangle\cdot\nabla H^{(0)} + \nabla^2 H^{(0)} + \frac{g}{K_G} + \\
& \nabla\langle f\rangle\cdot\nabla H^{(1)} + \nabla^2 H^{(1)} + \nabla f'\cdot\nabla H^{(0)} - \frac{g}{K_G}f' + \\
& \nabla\langle f\rangle\cdot\nabla H^{(2)} + \nabla^2 H^{(2)} + \nabla f'\cdot\nabla H^{(1)} + \frac{g}{2K_G}(f')^2 + \\
& \nabla\langle f\rangle\cdot\nabla H^{(3)} + \nabla^2 H^{(3)} + \nabla f'\cdot\nabla H^{(2)} - \frac{g}{6K_G}(f')^3 + \cdots
\end{aligned} \tag{7.4.32}
$$

将各阶展开分离并且合并同类项，可得水头各阶展开所满足的方程，

$$
\begin{gathered}
\frac{S_s}{K_G(\mathrm{x})}\frac{\partial H^{(p)}(\mathrm{x},t)}{\partial t} = \nabla^2 H^{(p)}(\mathrm{x},t) + \nabla\langle f(\mathrm{x})\rangle\cdot\nabla H^{(p)}(\mathrm{x},t) + g^{(p)}(\mathrm{x},t) \\
H^{(p)}(\mathrm{x},0) = H_{ini}(\mathrm{x})\delta_{p,0},\quad \mathrm{x}\in\Omega \\
H^{(p)}(\mathrm{x},t) = H_d(\mathrm{x},t)\delta_{p,0},\quad \mathrm{x}\in\Gamma_D \\
\nabla H^{(p)}(\mathrm{x},t)\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x}) = Q^{(p)}(\mathrm{x},t),\quad \mathrm{x}\in\Gamma_N
\end{gathered} \tag{7.4.33}
$$

式中：p 为方程的阶数；$\delta_{p,0}$ 为 Kronecker 函数，当 p=0 时 $\delta_{p,0}$=1，p 为其他值时，$\delta_{p,0}$=0。

本章考虑水头的三阶展开。在方程(7.4.33)中，各阶的驱动项 $g^{(p)}(\mathbf{x},t)$和 $Q^{(p)}(\mathbf{x},t)$分别定义如下，

$$
\begin{aligned}
g^{(0)}(\mathrm{x},t) &= \frac{g(\mathrm{x},t)}{K_G(\mathrm{x})} \\
Q^{(0)}(\mathrm{x},t) &= -\frac{Q_n(\mathrm{x},t)}{K_G(\mathrm{x})}
\end{aligned} \tag{7.4.34}
$$

$$
\begin{aligned}
g^{(1)}(\mathrm{x},t) &= \frac{S_s}{K_G(\mathrm{x})}\frac{\partial H^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial t}f'(\mathrm{x}) + \nabla f'(\mathrm{x})\cdot\nabla H^{(0)}(\mathrm{x},t) - \frac{g(\mathrm{x},t)}{K_G(\mathrm{x})}f'(\mathrm{x}) \\
Q^{(1)}(\mathrm{x},t) &= \frac{Q_n(\mathrm{x},t)}{K_G(\mathrm{x})}f'(\mathrm{x})
\end{aligned} \tag{7.4.35}
$$

$$g^{(2)}(\mathrm{x},t)=\frac{S_s}{K_G(\mathrm{x})}\left\{\frac{\partial H^{(1)}(\mathrm{x},t)}{\partial t}f'(\mathrm{x})-\frac{1}{2}\frac{\partial H^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial t}\left[f'(\mathrm{x})\right]^2\right\}$$

$$+\nabla H^{(1)}(\mathrm{x},t)\cdot\nabla f'(\mathrm{x})+\frac{g(\mathrm{x},t)}{2K_G(\mathrm{x})}\left[f'(\mathrm{x})\right]^2 \tag{7.4.36}$$

$$Q^{(2)}(\mathrm{x},t)=-\frac{Q_n(\mathrm{x},t)}{2K_G(\mathrm{x})}\left[f'(\mathrm{x})\right]^2$$

$$g^{(3)}(\mathrm{x},t)=\frac{S_s}{K_G(\mathrm{x})}\left\{\frac{\partial H^{(2)}(\mathrm{x},t)}{\partial t}f'(\mathrm{x})-\frac{1}{2}\frac{\partial H^{(1)}(\mathrm{x},t)}{\partial t}\left[f'(\mathrm{x})\right]^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}\frac{\partial H^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial t}\left[f'(\mathrm{x})\right]^3\right\}+\nabla H^{(2)}(\mathrm{x},t)\cdot\nabla f'(\mathrm{x})-\frac{g(\mathrm{x},t)}{6K_G(\mathrm{x})}\left[f'(\mathrm{x})\right]^3 \tag{7.4.37}$$

$$Q^{(3)}(\mathrm{x},t)=\frac{Q_n(\mathrm{x},t)}{6K_G(\mathrm{x})}\left[f'(\mathrm{x})\right]^3$$

当 p=0 时，由方程(7.4.33)得到零阶方程，

$$\begin{gathered}\frac{S_s}{K_G(\mathrm{x})}\frac{\partial H^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial t}=\nabla^2 H^{(0)}(\mathrm{x},t)+\nabla\langle f(\mathrm{x})\rangle\cdot\nabla H^{(0)}(\mathrm{x},t)+g^{(0)}(\mathrm{x},t)\\ H^{(0)}(\mathrm{x},0)=H_{ini}(\mathrm{x}),\quad \mathrm{x}\in\Omega\\ H^{(0)}(\mathrm{x},t)=H_d(\mathrm{x},t),\quad \mathrm{x}\in\Gamma_D\\ \nabla H^{(0)}(\mathrm{x},t)\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x})=Q^{(0)}(\mathrm{x},t),\quad \mathrm{x}\in\Gamma_N\end{gathered} \tag{7.4.38}$$

零阶方程是确定性方程，可以直接求解。注意到，零阶方程与原来的流动方程非常相似。事实上，将原流动方程中的 K_s 用其几何平均 K_G 替代，就得到零阶方程。

当 $p=1,2,\cdots$ 时，得到相应阶数的摄动方程，它们都是随机微分方程，描述了饱和介质中水头的扰动与介质参数的扰动量之间的各阶关系。这些方程说明饱和水流系统输出的随机扰动是由系统输入参数的随机扰动所引起的，即介质特性的空间变异性导致了水流运动的非均匀性，同时它也依赖于水流平均流动状态。事实上，水力传导度的小尺度脉动会产生明显的大尺度效应，主要的是因为水力传导度的扰动与水流变量的扰动之间存在着非线性关系。下一节阐述如何结合 KL 展开求解这些随机方程。

由方程(7.4.33)可见，水头展开项满足递推方程，也就是高阶项仅与低阶项有关，因而可以较容易得到任意高阶展开项。理论上可以通过评估各阶展开项的贡献来确定展开式的收敛性，然而实际上越是高阶项越难以计算。由于 $H^{(n)}$是随机的，因而展开式的收敛性不能通过 $H^{(n)}$的数值大小来判别，但是可以通过其统计矩来判别。往往随机模拟将 Monte-Carlo 方法的结果作为随机问题的真实解，而将模拟结果与其进行比较从而确定展开式的阶数。

（二） 基于 KL 展开的摄动方程

根据 Karhunen-Loève 展开，将随机场 $f'(\mathrm{x})$ 离散为

$$f'(\mathrm{x})=\sum_{I=1}^{\infty}f_I(\mathrm{x})\xi_I \tag{7.4.39}$$

f_I与随机场的协方差函数的特征值和特征函数有关。

由于随机解函数 $H(\mathbf{x},t)$的协方差函数事先是无法确定的，因而不能对其采用 KL 展开将其分解。水流系统的不确定性来自于随机场 $f(\mathbf{x})$，考虑到随机输入展开式(7.4.39)，可以将水头展开为式(7.4.39)中随机变量的多项式，

$$H^{(1)}=\sum_{I=1}^{\infty}H_I\xi_I \tag{7.4.40}$$

$$H^{(2)}=\sum_{I,J=1}^{\infty}H_{IJ}\xi_I\xi_J \tag{7.4.41}$$

$$H^{(3)}=\sum_{I,J,K=1}^{\infty}H_{IJK}\xi_I\xi_J\xi_K \tag{7.4.42}$$

式中，H_I，H_{IJ}和 H_{IJK}是待求的确定性系数，H_{IJ}关于下标 I 和 J 对称，H_{IJK}关于下标 I、J 和 K 对称。求解各展开系数 H_I，H_{IJ}，H_{IJK}，就可以得到水头的随机表达式，从而计算水头的统计矩。

令 p=1，将式(7.4.39)和(7.4.40)代入方程(7.4.33)有

$$\begin{gathered}\sum_{I=1}^{\infty}\left[\frac{S_s}{K_G(\mathrm{x})}\frac{\partial H_I(\mathrm{x},t)}{\partial t}-\nabla^2H_I(\mathrm{x},t)-\nabla\langle f(\mathrm{x})\rangle\cdot\nabla H_I(\mathrm{x},t)-g_I(\mathrm{x},t)\right]\xi_I=0\\ \sum_{I=1}^{\infty}H_I(\mathrm{x},0)\xi_I=0,\quad \mathrm{x}\in\Omega\\ \sum_{I=1}^{\infty}H_I(\mathrm{x},t)\xi_I=0,\quad \mathrm{x}\in\Gamma_D\\ \nabla\left[\sum_{I=1}^{\infty}H_I(\mathrm{x},t)\xi_I\right]\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x})=\sum_{I=1}^{\infty}Q_I(\mathrm{x},t)\xi_I,\quad \mathrm{x}\in\Gamma_N\end{gathered} \tag{7.4.43}$$

在方程(7.4.43)两边同时乘以随机变量ξ_I，I 为 1,2,⋯中任意值，然后取集平均，利用式(7.4.8)可得

$$\begin{gathered}\frac{S_s}{K_G(\mathrm{x})}\frac{\partial H_I(\mathrm{x},t)}{\partial t}=\nabla^2H_I(\mathrm{x},t)+\nabla\langle f(\mathrm{x})\rangle\cdot\nabla H_I(\mathrm{x},t)+g_I(\mathrm{x},t)\\ H_I(\mathrm{x},0)=0,\quad \mathrm{x}\in\Omega\\ H_I(\mathrm{x},t)=0,\quad \mathrm{x}\in\Gamma_D\\ \nabla H_I(\mathrm{x},t)\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x})=Q_I(\mathrm{x},t),\quad \mathrm{x}\in\Gamma_N\\ g_I(\mathrm{x},t)=\frac{S_s}{K_G(\mathrm{x})}\frac{\partial H^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial t}f_I(\mathrm{x})+\nabla f_I(\mathrm{x})\cdot\nabla H^{(0)}(\mathrm{x},t)-\frac{g(\mathrm{x},t)}{K_G(\mathrm{x})}f_I(\mathrm{x})\\ Q_I(\mathrm{x},t)=\frac{Q_n(\mathrm{x},t)}{K_G(\mathrm{x})}f_I(\mathrm{x})\end{gathered} \tag{7.4.44}$$

由 KL 展开的定义可知，方程(7.4.44)中的驱动项 $g_I(\mathbf{x},t)$和 $Q_I(\mathbf{x},t)$都与 $f'(\mathrm{x})$ 的 KL 展开的特征值的平方根成比例，因而随着下标 I 的增加而单调减少。一般地，这使得 $H_I(\mathbf{x},t)$对 $H^{(1)}(\mathbf{x},t)$的作用随着 I 的增加而降低，当 I 为某一数值时其后的项均可忽略不计，那么可以将 H_I取到一定项数而

得到 $H^{(1)}$的较好的近似表达。同时也说明 $H_I(\mathbf{x},t)$与 $f(\mathbf{x})$的标准差σ_f成比例，因此 $H^{(1)}(\mathbf{x},t)$的展开式(7.4.40)是合理的。

令 p=2，将展开式(7.4.39)~(7.4.41)代入方程(7.4.33)得到

$$\sum_{I,J=1}^{\infty} D_{IJ}\xi_I\xi_J = 0 \tag{7.4.45}$$

式中，$D_{IJ} = \dfrac{S_s}{K_G(\mathrm{x})}\dfrac{\partial H_{IJ}(\mathrm{x},t)}{\partial t} - \nabla^2 H_{IJ}(\mathrm{x},t) - \nabla\langle f(\mathrm{x})\rangle\cdot\nabla H_{IJ}(\mathrm{x},t) - g_{IJ}(\mathrm{x},t)$。

对式(7.4.45)直接取集平均有

$$\sum_{I=1}^{\infty} D_{II} = 0 \tag{7.4.46}$$

在式(7.4.45)两边同时乘以$\xi_K\xi_L$，其中 K、L 为 1,2,⋯中任意值，然后取集平均得到

$$\sum_{I,J=1}^{\infty} D_{IJ}(\delta_{IJ}\delta_{KL} + \delta_{IK}\delta_{JL} + \delta_{IL}\delta_{JK}) = 0 \tag{7.4.47}$$

分析式(7.4.47)可知：当$K \neq L$时，$D_{KL}+D_{LK}=0$，由于 D_{IJ}关于下标 I 和 J 是对称的，于是有 $D_{KL}=0$；当 $K=L$ 时，$2D_{KK} + \sum_{I=1}^{\infty} D_{II} = 0$，结合式(7.4.46)有 $D_{KK}=0$。这样，对于任意 K、L=1,2…都有 $D_{KL}=0$，由 K 和 L 的任意性可知 $D_{IJ}=0$。对边界条件也可得到类似的结论。于是，水头二阶展开系数的方程为，

$$\begin{gathered}
\frac{S_s}{K_G(\mathrm{x})}\frac{\partial H_{IJ}(\mathrm{x},t)}{\partial t} = \nabla^2 H_{IJ}(\mathrm{x},t) + \nabla\langle f(\mathrm{x})\rangle\cdot\nabla H_{IJ}(\mathrm{x},t) + g_{IJ}(\mathrm{x},t) \\
H_{IJ}(\mathrm{x},0) = 0,\quad \mathrm{x}\in\Omega \\
H_{IJ}(\mathrm{x},t) = 0,\quad \mathrm{x}\in\Gamma_D \\
\nabla H_{IJ}(\mathrm{x},t)\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x}) = Q_{IJ}(\mathrm{x},t),\quad \mathrm{x}\in\Gamma_N \\
\begin{aligned}
g_{IJ}(\mathrm{x},t) = {} & \frac{S_s}{2K_G(\mathrm{x})}\left[f_I(\mathrm{x})\frac{\partial H_J(\mathrm{x},t)}{\partial t} + f_J\frac{\partial H_I(\mathrm{x},t)}{\partial t}\right] \\
& + \frac{1}{2}\left[\nabla f_I(\mathrm{x})\cdot\nabla H_J(\mathrm{x},t) + \nabla f_J(\mathrm{x})\cdot\nabla H_I(\mathrm{x},t)\right] \\
& - \frac{S_s}{2K_G(\mathrm{x})}\frac{\partial H^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial t}f_I(\mathrm{x})f_J(\mathrm{x}) + \frac{g(\mathrm{x},t)}{2K_G(\mathrm{x})}f_I(\mathrm{x})f_J(\mathrm{x}) \\
Q_{IJ}(\mathrm{x},t) = {} & -\frac{Q_n(\mathrm{x},t)}{2K_G(\mathrm{x})}f_I(\mathrm{x})f_J(\mathrm{x})
\end{aligned}
\end{gathered} \tag{7.4.48}$$

（三） 水流变量的统计矩

在以后的讨论中，水流变量的均值的近似阶数是相对于 σ_f而言，比如一阶均值指的是 $O(\sigma_f)$，二阶均值指的是 $O^2(\sigma_f)$；水流变量的(协)方差的近似阶数是相对于σ_f^2而言，比如一阶方差指的是

$O(\sigma_f^2)$，二阶方差指的是$O^2(\sigma_f^2)$。

在一阶随机分析中，将水头展开为 $H=H^{(0)}+H^{(1)}$，由$<H^{(0)}>=H^{(0)}$，$<H^{(1)}>=0$ 可知，水头的一阶均值为$\langle H\rangle=H^{(0)}$。高阶水头均值往往只计算到二阶，即令方程(7.4.33)中的 p=2，同时取集平均，得到水头均值二阶修正项$\langle H^{(2)}\rangle$的方程。该方程包含有互协方差$C_{fH}=\left\langle f'H^{(1)}\right\rangle$，因此还必须首先求解 C_{fH}。

用传统矩方程方法求解一阶水头协方差 $C_H(\mathbf{x},t;\mathbf{y},\tau)$，令方程(7.4.33)中的 p=1 得到 $H^{(1)}(\mathbf{x},t)$的方程，方程中的每一项都乘以 $H^{(1)}(\mathbf{y},\tau)$，然后取集平均。该方程中也包含有互协方差 C_{fH}。一旦求解方程(7.4.44)、(7.4.48)获得 $H^{(0)}(\mathbf{x},t)$, $H_I(\mathbf{x},t)$, $H_{IJ}(\mathbf{x},t)$，就得到水头随机场 $H(\mathbf{x},t)$的随机表达式，这样可以直接计算水头的统计矩，而无需求解传统矩方程方法中的关于对数饱和水力传导度与水头的互协方差方程。

（1）水头的统计矩

考虑水头的三阶展开，那么水头随机场近似表达为，

$$H(\mathrm{x},t)\approx H^{(0)}(\mathrm{x},t)+H^{(1)}(\mathrm{x},t)+H^{(2)}(\mathrm{x},t)+H^{(3)}(\mathrm{x},t) \tag{7.4.49}$$

对上式取集平均得到，

$$\begin{aligned}\left\langle H(\mathrm{x},t)\right\rangle &= H^{(0)}(\mathrm{x},t)+\left\langle H^{(2)}(\mathrm{x},t)\right\rangle \\ &= H^{(0)}(\mathrm{x},t)+\sum_{I=1}^{\infty}H_{II}(\mathrm{x},t)\end{aligned} \tag{7.4.50}$$

上式右端第一项为零阶或一阶水头均值，第二项为一阶均值的二阶或三阶修正项。

由式(7.4.49)减去(7.4.50)可得到水头扰动，

$$H'(\mathrm{x},t)=H^{(1)}(\mathrm{x},t)+H^{(2)}(\mathrm{x},t)+H^{(3)}(\mathrm{x},t)-\left\langle H^{(2)}(\mathrm{x},t)\right\rangle \tag{7.4.51}$$

由上式和式(7.4.39)可得对数饱和水力传导度与水头的互协方差，

$$\begin{aligned}C_{fH}(\mathrm{x};\mathrm{y},\tau) &= \left\langle f'(\mathrm{x})H'(\mathrm{x},\tau)\right\rangle \\ &= \left\langle f'(\mathrm{x})\left[H^{(1)}(\mathrm{x},\tau)+H^{(2)}(\mathrm{x},\tau)+H^{(3)}(\mathrm{x},\tau)-\left\langle H^{(2)}(\mathrm{x},\tau)\right\rangle\right]\right\rangle \\ &= \left\langle f'(\mathrm{x})H^{(1)}(\mathrm{x},\tau)\right\rangle+\left\langle f'(\mathrm{x})H^{(3)}(\mathrm{x},\tau)\right\rangle \\ &= \sum_{I=1}^{\infty}f_I(\mathrm{x})H_I(\mathrm{y},\tau)+3\sum_{I,J=1}^{\infty}f_I(\mathrm{x})H_{IJJ}(\mathrm{y},\tau)\end{aligned} \tag{7.4.52}$$

保留到水头展开的二次项系数，则可得到水头的协方差为，

$$
\begin{aligned}
C_H(\mathrm{x},t;\mathrm{y},\tau) &= \left\langle H'(\mathrm{x},t)H'(\mathrm{x},\tau)\right\rangle \\
&= \Big\langle H^{(1)}(\mathrm{x},t)H^{(1)}(\mathrm{y},\tau) + H^{(2)}(\mathrm{x},t)H^{(2)}(\mathrm{y},\tau) \\
&\qquad + H^{(1)}(\mathrm{x},t)H^{(3)}(\mathrm{y},\tau) + H^{(3)}(\mathrm{x},t)H^{(1)}(\mathrm{y},\tau)\Big\rangle \\
&\qquad - \left\langle H^{(2)}(\mathrm{x},t)\right\rangle\left\langle H^{(2)}(\mathrm{y},\tau)\right\rangle \\
&= \sum_{I=1}^{\infty} H_I(\mathrm{x},t)H_I(\mathrm{y},\tau) + 2\sum_{I,J=1}^{\infty} H_{IJ}(\mathrm{x},t)H_{IJ}(\mathrm{y},\tau)
\end{aligned}
\tag{7.4.53}
$$

由上式可得水头方差，

$$
\sigma_H^2(\mathrm{x},t) = \sum_{I=1}^{\infty}\left[H_I(\mathrm{x},t)\right]^2 + 2\sum_{I,J=1}^{\infty}\left[H_{IJ}(\mathrm{x},t)\right]^2 \tag{7.4.54}
$$

上式右端第一项为一阶水头方差，第二项和第三项为一阶方差的二阶修正项。

（2）流速的统计矩

求解了水头的各阶展开后，就可以得到其他水流变量的统计矩。流速的统计矩可从达西定律推导得到，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{q}(\mathrm{x},t) = -K_G(\mathrm{x})&\left[1 + f'(\mathrm{x}) + \frac{1}{2}\left[f'(\mathrm{x})\right]^2 + \frac{1}{6}\left[f'(\mathrm{x})\right]^3 + \ldots\right]\cdot \\
&\nabla\left[H^{(0)}(\mathrm{x},t) + H^{(1)}(\mathrm{x},t) + H^{(2)}(\mathrm{x},t) + H^{(3)}(\mathrm{x},t) + \ldots\right]
\end{aligned}
\tag{7.4.55}
$$

按照不同阶数合并同类项，保留三阶项有，

$$
qi(\mathrm{x},t) = qi^{(0)}(\mathrm{x},t) + qi^{(1)}(\mathrm{x},t) + qi^{(2)}(\mathrm{x},t) + qi^{(3)}(\mathrm{x},t) \tag{7.4.56}
$$

式中，qi 为流速场的第 i^{th} 分量，i=1,2。各阶展开项为，

$$
\begin{aligned}
qi^{(0)}(\mathrm{x}) &= -K_G(\mathrm{x})\frac{\partial H^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial x_i} \\
qi^{(1)} &= -K_G(\mathrm{x})\left[\frac{\partial H^{(1)}}{\partial x_i} + f'\frac{\partial H^{(0)}}{\partial x_i}\right] \\
qi^{(2)} &= -K_G(\mathrm{x})\left[\frac{\partial H^{(2)}}{\partial x_i} + f'\frac{\partial H^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{1}{2}f'^2\frac{\partial H^{(0)}}{\partial x_i}\right]
\end{aligned}
\tag{7.4.57}
$$

式(7.4.57)表明 $\langle qi\rangle = qi^{(0)}$ 为零阶或一阶平均流速，$\langle qi\rangle = qi^{(0)} + \left\langle qi^{(2)}\right\rangle$ 为二阶或三阶平均流速，

$q' = q^{(1)}$ 为一阶流速扰动。一阶摄动方法得到的平均流速和流速方差为，

$$
\langle qi(\mathrm{x})\rangle = K_G J_i
$$

$$C_{qi}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = K_G{}^2 \Big[J(\mathrm{x})J(\mathrm{y})C_f(\mathrm{x},\mathrm{y}) - J(\mathrm{x})\frac{\partial}{\partial y}C_{fH}(\mathrm{x},\mathrm{y}) - J(\mathrm{y})\frac{\partial}{\partial x}C_{fH}(\mathrm{y},\mathrm{x}) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}C_h(\mathrm{x},\mathrm{y}) \Big]$$

式中，$J_i(\mathrm{x}) = -\partial H^{(0)} / \partial x_i$ 为零阶平均水力梯度。

平均流速的二阶修正项为，

$$\left\langle q^{(2)}(\mathrm{x}) \right\rangle = K_G \left[\frac{J(\mathrm{x})}{2}\sigma_f^2(\mathrm{x}) - \frac{\partial}{\partial x}\left\langle H^{(2)}(\mathrm{x}) \right\rangle - \frac{\partial}{\partial y}C_{fH}(\mathrm{x},\mathrm{y})\Big|_{\mathrm{x}=\mathrm{y}} \right]$$

将 f' 的展开式及各阶水头 $H^{(p)}$的展开代入式(7.4.56)可得，

$$qi(\mathrm{x},t) = qi^{(0)}(\mathrm{x},t) + \sum_{I=1}^{\infty} qi_I(\mathrm{x},t)\xi_I + \sum_{I,J=1}^{\infty} qi_{IJ}(\mathrm{x},t)\xi_I\xi_J \tag{7.4.58}$$

各阶的展开项为，

$$\begin{aligned} qi_I &= -K_G(\mathrm{x}) \left[\frac{\partial H_I(\mathrm{x},t)}{\partial x_i} + f_I(\mathrm{x})\frac{\partial H^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial x_i} \right] \\ qi_{IJ} &= -K_G(\mathrm{x}) \left[\frac{\partial H_{IJ}(\mathrm{x},t)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\left(f_I(\mathrm{x})\frac{\partial H_J(\mathrm{x},t)}{\partial x_i} + f_J(\mathrm{x})\frac{\partial H_I(\mathrm{x},t)}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} f_I(\mathrm{x}) f_J \frac{\partial H^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial x_i} \right] \end{aligned} \tag{7.4.59}$$

流速的均值为

$$\left\langle qi(\mathrm{x},t) \right\rangle = qi^{(0)}(\mathrm{x},t) + \left\langle qi^{(2)}(\mathrm{x},t) \right\rangle = qi^{(0)}(\mathrm{x},t) + \sum_{I=1}^{\infty} qi_{II}(\mathrm{x},t) \tag{7.4.60}$$

流速的随机扰动为，

$$qi'(\mathrm{x},t) = qi^{(1)}(\mathrm{x},t) + qi^{(2)}(\mathrm{x},t) + qi^{(3)}(\mathrm{x},t) - \left\langle qi^{(2)}(\mathrm{x},t) \right\rangle \tag{7.4.61}$$

流速的协方差为，

$$\begin{aligned} C_{qi}(\mathrm{x},t;\mathrm{y},\tau) &= \left\langle qi'(\mathrm{x},t) qi'(\mathrm{y},\tau) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} qi_I(\mathrm{x},t) qi_I(\mathrm{y},\tau) + 2\sum_{i,j=1}^{\infty} qi_{IJ}(\mathrm{x},t) qi_{IJ}(\mathrm{y},\tau) \end{aligned} \tag{7.4.62}$$

由上式可得流速的方差为，

$$\sigma_{qi}^2(\mathrm{x},t) = \sum_{I=1}^{\infty} \left[qi_I(\mathrm{x},t) \right]^2 + 2\sum_{I,J=1}^{\infty} \left[qi_{IJ}(\mathrm{x},t) \right]^2 \tag{7.4.63}$$

（四） 算例分析

首先分析由于边界条件的变动而引起的非稳定流动。水流运动矩形区域大小 $L_1=L_2=100$[m]，均匀离散为 40×40 个正方形单元，模拟区域的概化图如图 7.6 所示。协方差为离散指数型，方差 σ_f^2 为 1.0，相关长度 λ 为 4.0m。研究区域初始处于静止状态，初始水头 H_{ini}=5m，从 t=0 时刻开始，给定左边界 x_2=0m 定水头 H_{d1}=10m，边界 x_2=100m 定水头 H_{d2}=0.0m，另外两个边界(x_1=0m 和 x_1=100m)为隔水边界。

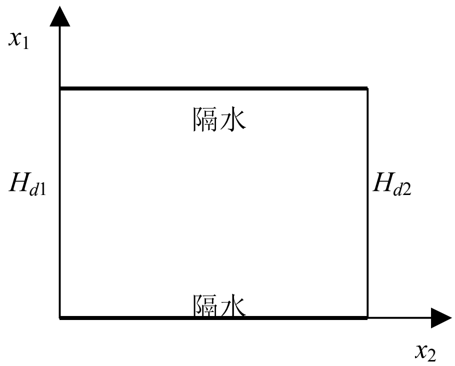


图 7.6 模拟区域概化图

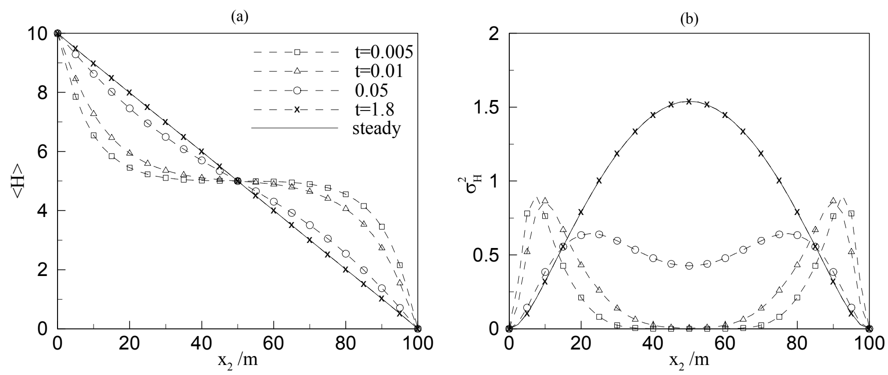


图 7.7 边界条件变动引起的非稳定流的各时段水头均值(a)和方差(b)

图 7.7 和图 7.8 为平均水头、水头方差、流速均值以及流速方差在不同时刻沿纵向中心线 x_1=50m 的分布，各统计矩都计算到二阶。图中的实线为水流达到稳定状态时的各统计矩。当边界条件刚刚开始起作用时，含水层中的地下水流运动主要发生在两定水头边界，区域的中心还没有受到影响，因而依然保持常水头，水头方差、流速及其方差都为 0。随着时间的推移，水流逐渐传播到区域中心。水头方差在随时间的演变过程中，由于边界水头为确定性的，而中心区域受水流影响较小，因而形成了关于中心对称的两个峰值。水流稳定后，区域中心远离边界，受边界的影响很小，达到水头方差的最大值。流速的方差与其均值的变化类似，在水流的过程中，边界附近出现峰值，达到稳定状态后，含水层中地下水为均匀流动，流速的均值和方差基本上为常数。

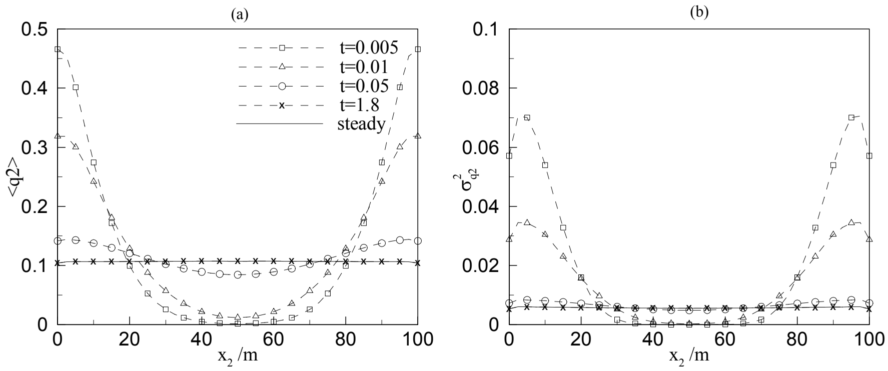


图 7.8　边界条件变动引起的非稳定流的各时段流速均值(a)和方差(b)

下面分析另一个由于源汇项的加入引起的非稳定流。模拟区域为 L_1=L_2=100m 的矩形承压含水层，侧向两边为隔水边界，另两边为定水头边界，水头 H_{d1}=H_{d2}=10m。区域中心(50m, 50m)处有一口定流量承压完整抽水井，抽水强度为 0.3/day，弹性储水率 S_s 为 $1.0\times10^{-4}\text{m}^{-1}$。初始状态，含水层的水头为静态分布，初始水头 H_{ini}=10m，从 t=0 时刻开始，抽水井开始工作，边界条件不变。

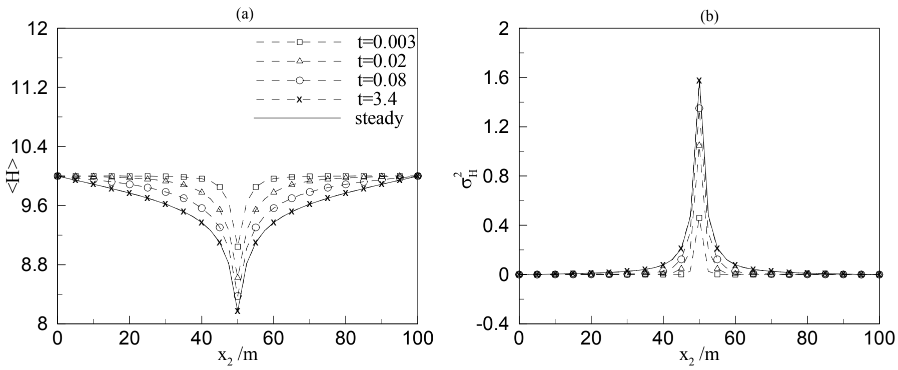


图 7.9　抽水引起的非稳定流的各时段水头均值(a)和方差(b)

在抽水刚开始的初始时刻，井附近的水位首先开始下降，远离抽水井的地方，地下水位没有受到影响。随着时间的推移，抽水井的影响范围扩大。在抽水初期水位下降较快，抽水达到稳定以后，形成了以井为中心的下降漏斗，抽水井处的水位比定水头边界下降了 1.8m（图 7.9a）。在两定水头边界处，由于边界条件为确定性的，水头方差始终为 0。抽水初期，井及其周围的水头方差较大（图 7.9b），而其他地方，由于流动还没发展过去，因而水头方差仍然为 0。在井中心附近，水位变化剧烈，形成了方差的峰值。随着时间的推移，抽水井处的水头方差越来越大。达到稳定后，水头方差的标准差为 1.26m，即水头的估计值的变动范围为±1.26m。对于一个具体的含水层，由于渗透系数的空间变异性，在抽水之前，具体水位降深的大小不可能给出，只能求得一定可信度范围的内水头的可能分布范围。

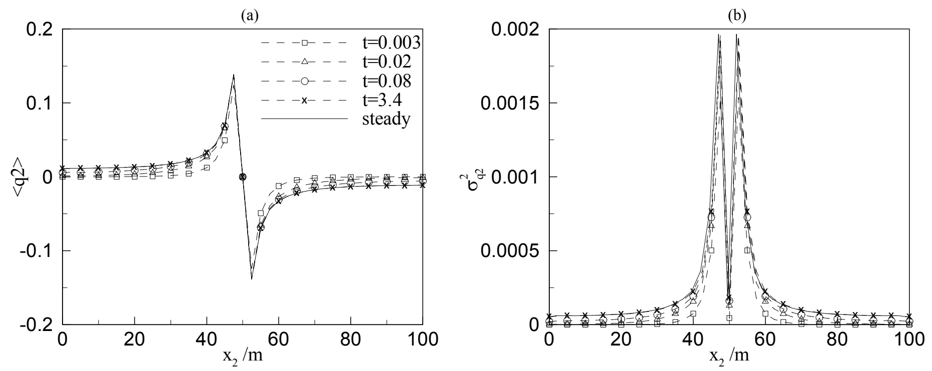


图 7.10　抽水引起的非稳定流的各时段流速均值(a)和方差(b)

在抽水井所处的节点处，水头在井点沿各方向的梯度都近似为 0，该点的流速近似为 0（图 7.10a）。在井的周围，水力梯度非常大，因而形成流速的峰值，越靠近定水头边界，梯度越小，所以流速也变得很小。纵向流速的方差沿井水平中心线的分布与水头方差的分布类似（图 7.10b），靠近定水头边界附近，纵向流速的方差较小，变化也较平缓，在井中心附近方差剧烈增高，但是到井中心由于基本没有流速而受介质随机性影响不大形成了方差的低谷。在整个非稳定流动过程中，水头的均值和方差都比流速的均值和方差变化幅度要大。抽水井中心的横向中心线相当于一个隔水边界，没有纵向流速，但是有横向的流速，其均值与方差的分布情况与纵向流速的一样。

由以上分析我们得到，水流变量的方差与均值之间是有一定联系的，一般来说，平均值越大或者是平均值的梯度越大，那么方差也会比较大。

四、 非饱和流运动的 Karhunen-Loève 分解模型

近年来，许多学者认识到土壤水的资源属性，将其作为水资源的重要组成部分。研究水资源的相互转化、预测地表水对地下水的补给量、农田土壤墒情的预测预报以及大面积地下水环境污染的预报等，都必须要首先了解非饱和带中的水分运动。

非饱和带中水分和污染物的运动影响植被的生长、蒸发蒸腾量、地下水补给量以及水质等，非饱和带既是地表水、土壤水和地下水相互联系和转化的枢纽，又是各种化学物质运移和反应的载体。对于地下水污染，污染物主要产生于地表，非饱和带作为缓冲带和传送带联系了地表水和地下水。非饱和流动过程对污染物到达含水层的路径起着重要的作用，特别在半干旱和干旱地区，非饱和带可能有几十米的厚度。非饱和带土壤对污染物的过滤和缓冲作用，使得非饱和带中的过程对于决定饱和带的水质和水量有重要的影响。

非饱和流运动的一个特点就是水流运动参数为水头或含水率的函数，因而描述水流运动的方程为非线性方程。由于非饱和流运动的高度非线性，土壤非均质性对水流过程的影响很难预测，相对非均质含水层中的饱和水流运动问题要复杂得多。同时，描述非饱和流运动的方程中参数较多，在随机分析中将要引入多个随机场，进一步增加了描述问题和求解过程的难度。

（一） 摄动方程

非饱和介质中的水流运动方程的基本形式为：

$$C(\mathrm{x},t)\frac{\partial h(\mathrm{x},t)}{\partial t}=\nabla\left[K(\mathrm{x},t)\nabla\left(h(\mathrm{x},t)+z\right)\right]+g(\mathrm{x},t) \tag{7.4.64}$$

式（7.4.64）描述了局部水流变量在时间和空间上的分布关系，通常与一定的定解条件联合求解。在研究区域 Ω 内给定初始分布条件，

$$h(\mathrm{x},0)=h_{ini}(\mathrm{x}) \tag{7.4.65}$$

第一类和第二类边界条件，

$$\begin{gathered}h(\mathrm{x},t)=h_d(\mathrm{x},t),\quad \mathrm{x}\in\Gamma_D\\ -K(\mathrm{x},t)\nabla\left(h(\mathrm{x},t)+z\right)\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x})=Q_n(\mathrm{x},t),\quad \mathrm{x}\in\Gamma_N\end{gathered} \tag{7.4.66}$$

式中：$C(\mathbf{x},t)$为容水度；$h(\mathbf{x},t)$为压力水头；$K(\mathbf{x},t)$为非饱和水力传导度；$g(\mathbf{x},t)$为源汇项；z 为垂向坐标，以向上为正；$\mathbf{n}(\mathbf{x})$是边界上的单位外法线向量；$h_{ini}(\mathbf{x})$，$h_d(\mathbf{x},t)$和 $Q_n(\mathbf{x},t)$分别为初始水头函数、第一类边界水头函数和第二类边界流量函数。

利用变换 $Y(\mathbf{x},t)=\ln K(\mathbf{x},t)$对定解问题(7.4.64) ~ (7.4.66)作变形处理，

$$\begin{gathered}e^{-Y(\mathrm{x},t)}C(\mathrm{x},t)\frac{\partial h(\mathrm{x},t)}{\partial t}=\nabla^2h(\mathrm{x},t)+\nabla Y(\mathrm{x},t)\nabla\left(h(\mathrm{x},t)+z\right)+e^{-Y(\mathrm{x},t)}g(\mathrm{x},t)\\ h(\mathrm{x},0)=h_{ini}(\mathrm{x}),\quad \mathrm{x}\in\Omega\\ h(\mathrm{x},t)=h_d(\mathrm{x},t),\quad \mathrm{x}\in\Gamma_D\\ e^{Y(\mathrm{x},t)}\nabla\left(h(\mathrm{x},t)+z\right)\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x})=-Q_n(\mathrm{x},t),\quad \mathrm{x}\in\Gamma_N\end{gathered} \tag{7.4.67}$$

在不引起混淆的情况下，部分式子将$(\mathbf{x},t)$和$(\mathbf{x})$省略。

方程(7.4.67)中 $Y(\mathbf{x},t)$和 $C(\mathbf{x},t)$是水头及土壤性质的函数，由于天然土壤的空间变异性，将土壤性质参数视为随机场，那么 $Y(\mathbf{x},t)$和 $C(\mathbf{x},t)$以及 $h(\mathbf{x},t)$也是随机场。将它们展开为级数形式，各阶展开项对应于水流系统随机输入的标准差的阶数次方，

$$h(\mathrm{x},t)=h^{(0)}(\mathrm{x},t)+h^{(1)}(\mathrm{x},t)+h^{(2)}(\mathrm{x},t)+\ldots \tag{7.4.68}$$

$$Y(\mathrm{x},t)=Y^{(0)}(\mathrm{x},t)+Y^{(1)}(\mathrm{x},t)+Y^{(2)}(\mathrm{x},t)+\ldots \tag{7.4.69}$$

$$C(\mathrm{x},t)=C^{(0)}(\mathrm{x},t)+C^{(1)}(\mathrm{x},t)+C^{(2)}(\mathrm{x},t)+\ldots \tag{7.4.70}$$

同样，$e^{Y(\mathbf{x},t)}$和 $e^{-Y(\mathbf{x},t)}$可以展开为，

$$\begin{aligned}e^{-Y(\mathrm{x},t)}&=e^{-Y^{(0)}}\left[en^{(0)}+en^{(1)}+en^{(2)}+\ldots\right]\\ e^{Y(\mathrm{x},t)}&=e^{Y^{(0)}}\left[ep^{(0)}+ep^{(1)}+ep^{(2)}+\ldots\right]\end{aligned} \tag{7.4.71}$$

展开式中各项为，

$$\begin{aligned}&en^{(0)}=1,\ en^{(1)}=-Y^{(1)},\ en^{(2)}=-Y^{(2)}+\frac{1}{2}Y^{(1)}Y^{(1)}\\ &ep^{(0)}=1,\ ep^{(1)}=Y^{(1)},\ ep^{(2)}=Y^{(2)}+\frac{1}{2}Y^{(1)}Y^{(1)}\end{aligned} \tag{7.4.72}$$

将式(7.4.68) ~ (7.4.71)带入方程(7.4.67)有，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{p}\sum_{s=0}^{p-r}\left[e^{-Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}en^{(r)}(\mathrm{x},t)C^{(s)}(\mathrm{x},t)\frac{\partial h^{(p-r-s)}(\mathrm{x},t)}{\partial t}\right]=\nabla^2 h^{(p)}(\mathrm{x},t)\\
&\quad+\sum_{k=0}^{p}\nabla Y^{(r)}(\mathrm{x},t)\nabla\left(h^{(p-r)}(\mathrm{x},t)+z\delta_{p-r,0}\right)+e^{-Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}en^{(p)}(\mathrm{x},t)g(\mathrm{x},t)\\
&h^{(p)}(\mathrm{x},0)=h_{ini}(\mathrm{x})\delta_{p,0},\quad \mathrm{x}\in\Omega\\
&h^{(p)}(\mathrm{x},t)=h_d(\mathrm{x},t)\delta_{p,0},\quad \mathrm{x}\in\Gamma_D\\
&\sum_{k=0}^{p}e^{Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}ep^{(r)}(\mathrm{x},t)\nabla\left[h^{(p-r)}(\mathrm{x},t)+z\delta_{p-r,0}\right]\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x})=-Q_n(\mathrm{x},t)\delta_{p,0},\quad \mathrm{x}\in\Gamma_N
\end{aligned}
\tag{7.4.73}
$$

方程(7.4.73)中包含有水头的各阶项，将各阶分离合并同类项，方程(7.4.73)可简化为

$$
\begin{aligned}
&c_0\frac{\partial h^{(p)}(\mathrm{x},t)}{\partial t}=\nabla^2 h^{(p)}(\mathrm{x},t)+\nabla Y^{(0)}(\mathrm{x},t)\nabla h^{(p)}(\mathrm{x},t)+g^{(p)}(\mathrm{x},t)\\
&h^{(p)}(\mathrm{x},0)=h_{ini}(\mathrm{x})\delta_{p,0},\quad \mathrm{x}\in\Omega\\
&h^{(p)}(\mathrm{x},t)=h_d(\mathrm{x},t)\delta_{p,0},\quad \mathrm{x}\in\Gamma_D\\
&\nabla h^{(p)}(\mathrm{x},t)\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x})=Q^{(p)}(\mathrm{x},t),\quad \mathrm{x}\in\Gamma_N
\end{aligned}
\tag{7.4.74}
$$

式中：$c_0=e^{-Y^{(0)}}en^{(0)}C^{(0)}$，$\delta_{p,0}$是 Kronecker 函数，当 p=0 时$\delta_{p,0}$=1，p 为其他值时，$\delta_{p,0}$=0。

方程(7.4.74)中的驱动项 $g^{(p)}(\mathbf{x},t)$和 $Q^{(p)}(\mathbf{x},t)$分别为，

$$
\begin{aligned}
&g^{(0)}(\mathrm{x},t)=e^{-Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}en^{(0)}g(\mathrm{x},t)+\frac{\partial Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial z}\\
&Q^{(0)}(\mathrm{x},t)=-e^{-Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}Q_n(\mathrm{x},t)/ep^{(0)}-\nabla z\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x})
\end{aligned}
\tag{7.4.75}
$$

$$
\begin{aligned}
g^{(1)}(\mathrm{x},t)=&\nabla Y^{(1)}(\mathrm{x},t)\nabla\left[h^{(0)}(\mathrm{x},t)+z\right]\\
&-e^{-Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}\left[C^{(1)}(\mathrm{x},t)en^{(0)}+C^{(0)}(\mathrm{x},t)en^{(1)}(\mathrm{x},t)\right]\frac{\partial h^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial t}\\
&+e^{-Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}en^{(1)}(\mathrm{x},t)g(\mathrm{x},t)\\
Q^{(1)}(\mathrm{x},t)=&-ep^{(1)}(\mathrm{x},t)\nabla\left[h^{(0)}(\mathrm{x},t)+z\right]\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x})/ep^{(0)}
\end{aligned}
\tag{7.4.76}
$$

$$
\begin{aligned}
g^{(2)}(\mathrm{x},t)=&\nabla Y^{(1)}(\mathrm{x},t)\nabla h^{(1)}(\mathrm{x},t)+\nabla Y^{(2)}(\mathrm{x},t)\nabla\left[h^{(0)}(\mathrm{x},t)+z\right]\\
&-e^{-Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}\left[C^{(1)}(\mathrm{x},t)en^{(0)}+C^{(0)}(\mathrm{x},t)en^{(1)}(\mathrm{x},t)\right]\frac{\partial h^{(1)}(\mathrm{x},t)}{\partial t}\\
&-e^{-Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}\left[C^{(2)}(\mathrm{x},t)en^{(0)}+C^{(1)}(\mathrm{x},t)en^{(1)}(\mathrm{x},t)+C^{(0)}(\mathrm{x},t)en^{(2)}(\mathrm{x},t)\right]\frac{\partial h^{(0)}}{\partial t}\\
&+e^{-Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}en^{(2)}(\mathrm{x},t)g(\mathrm{x},t)\\
Q^{(2)}(\mathrm{x},t)=&-\left\{ep^{(1)}(\mathrm{x},t)\nabla h^{(1)}(\mathrm{x},t)+ep^{(2)}(\mathrm{x},t)\nabla\left[h^{(0)}(\mathrm{x},t)+z\right]\right\}\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x})/ep^{(0)}
\end{aligned}
\tag{7.4.77}
$$

方程(7.4.74)是非饱和流的各阶摄动方程，这是后面推导和求解非饱和流随机问题的基础。当 p=0 时得到零阶方程，当 p=1 时得到一阶方程，当 p=2 时得到二阶方程，以此类推。

在以上推导的方程(7.4.74)中 $Y(\mathbf{x},t)$和 $C(\mathbf{x},t)$是未知的，为了定量化描述非饱和流动，非饱和水力传导度对压力水头和土壤含水率对压力水头的数学关系必须确定，即必须给定 $Y(\mathbf{x},t)$和 $C(\mathbf{x},t)$的具体函数表达式，同时还有它们的联合概率密度函数。这些信息的获取通常是较困难的，为了实际应用的目的必须做一些简化处理。为了简化随机分析，较为常用的方法就是将 $K(h)$和$\theta(h)$函数表示为解析模型的形式。认为这些关系式在土壤中的每一个点都适用，并且土壤水力性质的区域变化能够用模型中参数的空间变化来描述。Yeh(1985a)在非饱和稳定流的随机分析中采用 Gardner 指数模型。Mantoglou and Gelhar(1987a)在非饱和非稳定流的随机分析中也采用了 Gardner 指数模型，同时对含水率θ和水头 h 的关系作线性处理，即 $\theta(h)=\theta(<h>)+C(<h>)h'$，$h'$ 是水头 h 围绕均值$<h>$的随机扰动值，$C(<h>)$是$\theta(h)$曲线在 $h=<h>$处的斜率。Srivastava and Yeh(1991)为了将非饱和流方程线性化，采用指数函数关系描述θ (h)，即 $\theta(h)=\theta_r+(\theta_s-\theta_r)\exp[\alpha h]$。此外 Brooks and Corey(1964)也提出了基于经验关系式的土壤模型，在土壤学、石油工程等领域得到广泛应用，Zhang and Winter (1998)采用 Brooks-Corey 模型对稳定非饱和流进行非平稳随机分析。

在众多描述局部非饱和水力传导度和水分特征曲线的模型中，具有代表性的有三个，分别是 Gardner-Russo 模型，Brooks-Corey 模型和 van Genuchten-Mualem 模型。由于 Gardner-Russo 模型比较简单，很多研究者使用 Gardner−Russo 模型来推导非饱和流问题确定性分析和随机分析的解析解。尽管很多空间变异性分析都使用了 Gardner−Russo 模型，但是该模型不能在较大的压力水头范围内拟合测量数据。较为复杂的 Brooks-Corey 模型和 van Genuchten-Mualem 模型能很好的拟合不同类型非饱和土壤的测量数据，因而更能反映土壤水力特征。Zhang et al.(1998)分析了 Gardner-Russo 模型和 Brooks-Corey 模型对重力作用下的稳定非饱和流计算结果的影响，认为主要取决于土壤的干湿程度。van Genuchten-Mualem 模型在土壤水分运动确定性数值模型中被普遍采用，但是由于其数学复杂性，在随机分析中却并不多见。Lu and Zhang (2002b)在该模型的基础上进行非饱和流的随机分析。

以下分别采用 Gardner-Russo (GR)模型和 van Genuchten-Mualem (VG)模型建立非饱和流随机数值模型，可根据具体土壤类型、测量数据及土壤水分状况选择不同模型作随机分析。

（二） 基于 GR 模型的随机流动模型

（1）土壤随机参数展开

采用 Gardner-Russo 模型，对非饱和水力传导度进行对数变换，可得，

$$Y(\mathrm{x})=f(\mathrm{x})+\alpha(\mathrm{x})h(\mathrm{x},t) \tag{7.4.78}$$

$f=\ln K_s$ 和α是非饱和水流系统的输入，作为高斯随机场，假定其统计量和空间结构如均值和协方差函数已知，可将其表示为，

$$f(\mathrm{x})=\langle f(\mathrm{x})\rangle+f'(\mathrm{x}),\ \ \alpha(\mathrm{x})=\langle \alpha(\mathrm{x})\rangle+\alpha'(\mathrm{x}) \tag{7.4.79}$$

式中，$\langle f(\mathrm{x})\rangle$ 和 $\langle \alpha(\mathrm{x})\rangle$ 为各随机场的均值部分，$f'(\mathrm{x})$ 和 $\alpha'(\mathrm{x})$ 为随机扰动分量。

将式(7.4.68)和(7.4.79)代入式(7.4.78)得，

$$Y(\mathrm{x}) = \langle f(\mathrm{x})\rangle + f'(\mathrm{x}) + \left[\langle \alpha(\mathrm{x})\rangle + \alpha'(\mathrm{x})\right]\left[h^{(0)} + h^{(1)} + h^{(2)} + \cdots\right] \tag{7.4.80}$$

考虑到 Y 的级数展开式(7.4.69)则有，

$$Y^{(0)}(\mathrm{x},t) = \langle f(\mathrm{x})\rangle + \langle \alpha(\mathrm{x})\rangle h^{(0)}(\mathrm{x},t) \tag{7.4.81}$$

$$Y^{(1)}(\mathrm{x},t) = f' + \langle \alpha(\mathrm{x})\rangle h^{(1)}(\mathrm{x},t) + h^{(0)}(\mathrm{x},t)\alpha'(\mathrm{x}) \tag{7.4.82}$$

$$Y^{(2)}(\mathrm{x},t) = \langle \alpha(\mathrm{x})\rangle h^{(2)}(\mathrm{x},t) + \alpha'(\mathrm{x})h^{(1)}(\mathrm{x},t) \tag{7.4.83}$$

容水度 $C=\mathrm{d}\theta_e/\mathrm{d}h$，由式(7.1.28)可得：

$$C(\mathrm{x},t) = -\frac{\theta_s - \theta_r}{2(m_{GR}+2)}\exp(0.5\alpha h)\alpha^2 h\left[\exp(0.5\alpha h)(1-0.5\alpha h)\right]^{-m_{GR}/(m_{GR}+2)} \tag{7.4.84}$$

式中 m_{GR} 表示 Gardner-Russo 模型中的参数。由式(7.4.84)可见，$C(\mathbf{x},t)$的表达式比较复杂，与 $h(\mathbf{x},t)$和$\alpha(\mathbf{x})$呈非线性关系，可借助 Taylor 公式将其围绕 $h^{(0)}$和$\langle\alpha\rangle$展开为级数，

$$C^{(0)} = -\frac{\theta_s - \theta_r}{2(m_{GR}+2)}\langle\alpha\rangle^2 h^{(0)}\exp\left(0.5\langle\alpha\rangle h^{(0)}\right)\left\{\exp\left(0.5\langle\alpha\rangle h^{(0)}\right)\left[1-0.5\langle\alpha\rangle h^{(0)}\right]\right\}^{\frac{-m_{GR}}{m_{GR}+2}} \tag{7.4.85}$$

$$C^{(1)} = \left.\frac{\partial C}{\partial h}\right|_{\langle\,\rangle} h^{(1)} + \left.\frac{\partial C}{\partial \alpha}\right|_{\langle\,\rangle} \alpha'$$

式中，$\left.\frac{\partial C}{\partial h}\right|_{\langle\,\rangle}$ 和 $\left.\frac{\partial C}{\partial \alpha}\right|_{\langle\,\rangle}$ 分别表示导函数在 $h^{(0)}$和$\langle\alpha\rangle$处取值。为简化符号表示，可记为，

$$C^{(1)}(\mathrm{x},t) = C_{11}h^{(1)}(\mathrm{x},t) + C_{12}\alpha'(\mathrm{x}) \tag{7.4.86}$$

式中，

$$\begin{aligned} C_{11} &= \overline{C}\,\frac{\langle\alpha\rangle^2\left[\left(\langle\alpha\rangle h^{(0)}\right)^2 - 2(m_{GR}+2)\right]}{(m_{GR}+2)\left(\langle\alpha\rangle h^{(0)} - 2\right)} \\ C_{12} &= \overline{C}\,\frac{\langle\alpha\rangle h^{(0)}\left[\left(\langle\alpha\rangle h^{(0)}\right)^2 + (m_{GR}+2)\langle\alpha\rangle h^{(0)} - 4(m_{GR}+2)\right]}{(m_{GR}+2)\left(\langle\alpha\rangle h^{(0)} - 2\right)} \end{aligned} \tag{7.4.87}$$

类似地，

$$C^{(2)} = \left.\frac{\partial C}{\partial h}\right|_{\langle\,\rangle} h^{(2)} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 C}{\partial h^2}\right|_{\langle\,\rangle}\left(h^{(1)}\right)^2 + \left.\frac{\partial^2 C}{\partial h\partial\alpha}\right|_{\langle\,\rangle}\alpha' h^{(1)} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 C}{\partial \alpha^2}\right|_{\langle\,\rangle}\left(\alpha'\right)^2$$

将其简记为，

$$C^{(2)}(\mathrm{x},t) = C_{21}h^{(2)}(\mathrm{x},t) + C_{22}\left[h^{(1)}(\mathrm{x},t)\right]^2 + C_{23}h^{(1)}(\mathrm{x},t)\alpha'(\mathrm{x}) + C_{24}\alpha'(\mathrm{x})^2 \tag{7.4.88}$$

式中，

$$
\begin{aligned}
C_{21} &= C^{(0)} \frac{\langle\alpha\rangle^2 \left[\left(\langle\alpha\rangle h^{(0)}\right)^2 - 2(m_{GR}+2)\right]}{h^{(0)}(m_{GR}+2)\left(\langle\alpha\rangle h^{(0)} - 2\right)} \\
C_{22} &= C^{(0)} \frac{\langle\alpha\rangle \left[\left(\langle\alpha\rangle h^{(0)}\right)^3 - 6(m_{GR}+2)\langle\alpha\rangle h^{(0)} + 4(m_{GR}+2)^2\right]}{2h^{(0)}(m_{GR}+2)^2\left(\langle\alpha\rangle h^{(0)} - 2\right)^2} \\
C_{23} &= C^{(0)} \frac{\left[\left(\langle\alpha\rangle h^{(0)}\right)^4 + 2(m_{GR}+2)\left(\langle\alpha\rangle h^{(0)}\right)^3 - 10(m_{GR}+2)\left(\langle\alpha\rangle h^{(0)}\right)^2 + 8(m+2)^2\right]}{\langle\alpha\rangle h^{(0)}(m_{GR}+2)^2\left(\langle\alpha\rangle h^{(0)} - 2\right)^2} \\
C_{24} &= C^{(0)} \frac{\left[\left(\langle\alpha\rangle h^{(0)}\right)^4 + 2(m_{GR}+2)\left(\langle\alpha\rangle h^{(0)}\right)^3 - 10(m_{GR}+2)\left(\langle\alpha\rangle h^{(0)}\right)^2 + 8(m_{GR}+2)^2\right]}{2\langle\alpha\rangle^2(m_{GR}+2)^2\left(\langle\alpha\rangle h^{(0)} - 2\right)^2}
\end{aligned}
\tag{7.4.89}
$$

Yang(2004)在其基于 KL 展开和摄动方法的随机分析中也采用了 GR 模型，但是为了数学处理上简便，是在 GR 模型中的非饱和参数 m 取值为零的基础上建立的随机数值模型，Zhang (1999)也作了同样的处理。事实上对于不同类型土壤，参数 m 的取值会有所不同，如 Russo and Bouton(1992)就将 m 取值为 0.5。Harter and Zhang (1999)对平稳参数场和水头场条件下的非饱和流解析分析表明，参数 m 的取值影响到土壤含水率的空间变化，从而对溶质弥散有较大影响。以上推导考虑了非饱和参数 m 的不同取值，因而更具通用性，当然仍将其作为确定性常量处理。

（2）基于 KL 展开的摄动方程

1）零阶方程

在方程(7.4.74)中令 p=0，将式(7.4.81)和(7.4.85)代入方程(7.4.74)可得，

$$
\begin{gathered}
c_0 \frac{\partial h^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial t} = \nabla^2 h^{(0)}(\mathrm{x},t) + a_1 \nabla h^{(0)}(\mathrm{x},t) + a_2 h^{(0)}(\mathrm{x},t) \\
+ e^{-Y^{(0)}(\mathrm{x},t)} e n^{(0)} g(\mathrm{x},t) + a_3 \\
h^{(0)}(\mathrm{x},0) = h_{ini}(\mathrm{x}), \mathrm{x} \in \Omega \\
h^{(0)}(\mathrm{x},t) = h_d(\mathrm{x},t), \mathrm{x} \in \Gamma_D \\
\nabla h^{(0)}(\mathrm{x},t) \cdot \mathrm{n}(\mathrm{x}) = -e^{-Y^{(0)}(\mathrm{x},t)} Q_n(\mathrm{x},t) / e p^{(0)} - \nabla z \cdot \mathrm{n}(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \Gamma_N
\end{gathered}
\tag{7.4.90}
$$

式中，$a_1 = \langle\alpha(\mathrm{x})\rangle \nabla\left(h^{(0)} + z\right)$，$a_2 = \nabla\langle\alpha(\mathrm{x})\rangle \nabla\left(h^{(0)} + z\right)$，$a_3 = \nabla\langle f(\mathrm{x})\rangle \nabla\left(h^{(0)} + z\right)$。方程(7.4.90)中的系数都是 $h^{(0)}(\mathbf{x},t)$的函数，因而零阶方程是关于 $h^{(0)}(\mathbf{x},t)$的非线性方程。在级数展开式(7.4.68)～(7.4.70)中，零阶项 $h^{(0)}(\mathbf{x},t)$、$Y^{(0)}(\mathbf{x},t)$、$C^{(0)}(\mathbf{x},t)$是确定性函数，因而零阶方程又是确定性方程。方程(7.4.90)是可以直接求解的，然而一阶和二阶方程中包含的 $h^{(1)}(\mathbf{x},t)$、$Y^{(1)}(\mathbf{x},t)$、$C^{(1)}(\mathbf{x},t)$、$h^{(2)}(\mathbf{x},t)$、$Y^{(2)}(\mathbf{x},t)$、$C^{(2)}(\mathbf{x},t)$都是随机项，相应的方程为随机方程，其求解过程不同于零阶方程那么直接。而且这两个方程中的随机输入有两个随机场 $f(\mathbf{x})$和$\alpha(\mathbf{x})$，它们之间的相关关系也会对随机分析结果产生一定影响，在理论上可以按照两随机场完全相关和不相关两种情况分别进行建模。

2）完全相关情况的一阶和二阶方程

假定两零均值随机场 $f'(\mathrm{x})$ 和 $\alpha'(\mathrm{x})$ 完全相关，它们的 KL 展开可采用同一随机变量序列，

$$f'(\mathrm{x})=\sum_{i=1}^{\infty} f_i \xi_i,\quad \alpha'(\mathrm{x})=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i \tag{7.4.91}$$

由 KL 展开的定义和性质可知，式(7.4.91)中的f_i和α_i分别与随机场f和α的标准差成正比。

由相关系数的定义可知，

$$\rho_{f'\alpha'}=\frac{\operatorname{cov}(f',\alpha')}{\sigma_{f'}\sigma_{\alpha'}}$$

同时又有，

$$\operatorname{cov}(f,\alpha)=\langle f'\alpha'\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^{\infty} f_i\xi_i\times\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i\right\rangle=\sum_{i=1}^{\infty} f_i\alpha_j\langle\xi_i\xi_j\rangle=\sum_{i=1}^{\infty} f_i\alpha_i$$

$$\sigma_{f'}^2=\langle f'^2\rangle=\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2,\qquad \sigma_{\alpha'}^2=\langle\alpha'^2\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2$$

所以，

$$\rho_{f'\alpha'}=\frac{\sum_{i=1}^{\infty} f_i\alpha_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2}}$$

根据柯西不等式，当$f_i=r\alpha_i$时$\rho_{f'\alpha'}=1$，r为任意实数。显然，当$r>0$时，f'和α'是完全线性正相关；当$r<0$时，f'和α'是完全线性负相关。完全线性相关的随机场f'和α'存在下列线性关系，

$$f'(\mathrm{x})=r\alpha'(\mathrm{x}) \tag{7.4.92}$$

水头的协方差等信息事先是无法知道的，因而不能采用 KL 展开分解。但是，由于水流系统的不确定性来源于随机输入f和α的不确定性，同时考虑到随机输入的 KL 展开式(7.4.91)，水头可用以下多项式展开表示，

$$h^{(1)}(\mathrm{x},t)=\sum_{i=1}^{\infty} h_i\xi_i \tag{7.4.93}$$

$$h^{(2)}(\mathrm{x},t)=\sum_{i,j=1}^{\infty} h_{ij}\xi_i\xi_j \tag{7.4.94}$$

将式(7.4.91)、(7.4.93)和(7.4.94)代入式(7.4.82)、(7.4.83)、(7.4.86)以及(7.4.88)可得，

$$Y^{(1)}=\sum_{i=1}^{\infty} Y_i\xi_i,\quad C^{(1)}=\sum_{i=1}^{\infty} C_i\xi_i \tag{7.4.95}$$

$$Y^{(2)}=\sum_{i,j=1}^{\infty} Y_{ij}\xi_i\xi_j,\quad C^{(2)}=\sum_{i,j=1}^{\infty} C_{ij}\xi_i\xi_j \tag{7.4.96}$$

同样地，

$$en^{(1)}=\sum_{i=1}^{\infty} en_i\xi_i,\quad ep^{(1)}=\sum_{i=1}^{\infty} ep_i\xi_i \tag{7.4.97}$$

$$en^{(2)}=\sum_{i,j=1}^{\infty} en_{ij}\xi_i\xi_j,\quad ep^{(2)}=\sum_{i=1}^{\infty} ep_{ij}\xi_i\xi_j \tag{7.4.98}$$

式(7.4.95) ~ (7.4.98)中各展开项的系数为，

$$
\begin{aligned}
&Y_i = f_i + \langle \alpha \rangle h_i + h^{(0)} \alpha_i \\
&C_i = C_{11} h_i + C_{12} \alpha_i \\
&en_i = -Y_i, \quad ep_i = Y_i
\end{aligned}
\tag{7.4.99}
$$

$$
\begin{aligned}
&Y_{ij} = \langle \alpha \rangle h_{ij} + \frac{1}{2}(h_i \alpha_j + h_j \alpha_i) \\
&C_{ij} = C_{21} h_{ij} + C_{22} h_i h_j + \frac{1}{2} C_{23} (h_i \alpha_j + h_j \alpha_i) + C_{24} \alpha_i \alpha_j \\
&en_{ij} = -Y_{ij} + \frac{1}{2} Y_i Y_j, \quad ep_{ij} = Y_{ij} + \frac{1}{2} Y_i Y_j
\end{aligned}
\tag{7.4.100}
$$

令 p=1，将式(7.4.93)、(7.4.95)和(7.4.97)带入方程(7.4.74)，在方程两边同时乘以ξ_i，i=1,2,…，然后取集平均，利用式(7.4.8)可得，

$$
\begin{aligned}
&c_0 \frac{\partial h_i(\mathrm{x},t)}{\partial t} = \nabla^2 h_i(\mathrm{x},t) + \nabla Y^{(0)}(\mathrm{x},t) \nabla h_i(\mathrm{x},t) + g_i(\mathrm{x},t) \\
&\qquad h_i(\mathrm{x},0) = 0, \quad \mathrm{x} \in \Omega \\
&\qquad h_i(\mathrm{x},t) = 0, \quad \mathrm{x} \in \Gamma_D \\
&\nabla h_i(\mathrm{x},t) \cdot \mathrm{n}(\mathrm{x}) = Q_i(\mathrm{x},t), \quad \mathrm{x} \in \Gamma_N \\
&g_i(\mathrm{x},t) = -e^{-Y^{(0)}(\mathrm{x},t)} \left[C_i(\mathrm{x},t) en^{(0)} + C^{(0)}(\mathrm{x},t) en_i(\mathrm{x},t) \right] \frac{\partial h^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial t} \\
&\qquad + \nabla Y_i(\mathrm{x},t) \nabla \left[h^{(0)}(\mathrm{x},t) + z \right] + e^{-Y^{(0)}(\mathrm{x},t)} en_i(\mathrm{x},t) g(\mathrm{x},t) \\
&Q_i(\mathrm{x},t) = -ep_i(\mathrm{x},t) \nabla \left[h^{(0)}(\mathrm{x},t) + z \right] \cdot \mathrm{n}(\mathrm{x}) / ep^{(0)}
\end{aligned}
\tag{7.4.101}
$$

在方程(7.4.101)中 $g_i(\mathbf{x},t)$和 $Q_i(\mathbf{x},t)$是 $h_i(\mathbf{x},t)$的线性函数，因而方程(7.4.101)是关于 h_i 的线性方程。此外，将含有 h_i 的项全部移到方程的左边，其余的项留在方程的右边，可以看到方程的右端项与随机输入 f 或α的标准差成正比，这表明 h_i 与随机输入 f 或α的标准差成比例，所以式(7.4.93)对一阶水头的表达式是合理的。

类似地，令 p=2，将式(7.4.94)、(7.4.96)和(7.4.98)代入方程(7.4.74)，在方程两边同时乘以$\xi_l \xi_n$，l, n=1,2…，考虑到$\{\xi_i\}$的正交性，取集平均后可得

$$c_0 \frac{\partial h_{ij}(\mathrm{x},t)}{\partial t} = \nabla^2 h_{ij}(\mathrm{x},t) + \nabla Y^{(0)}(\mathrm{x},t)\nabla h_{ij}(\mathrm{x},t) + g_{ij}(\mathrm{x},t)$$

$$h_{ij}(\mathrm{x},0) = 0, \quad \mathrm{x} \in \Omega$$

$$h_{ij}(\mathrm{x},t) = 0, \quad \mathrm{x} \in \Gamma_D$$

$$\nabla h_{ij}(\mathrm{x},t) \cdot \mathrm{n}(\mathrm{x}) = Q_{ij}, \quad \mathrm{x} \in \Gamma_N$$

$$\begin{aligned} g_{ij}(\mathrm{x},t) = & \frac{1}{2}\left(\nabla Y_i \nabla h_j + \nabla Y_j \nabla h_i\right) + \nabla Y_{ij} \nabla\left(h^{(0)} + z\right) + e^{-Y^{(0)}} en_{ij} g \\ & - \frac{1}{2} e^{-Y^{(0)}} \left[\left(C_i \frac{\partial h_j}{\partial t} + C_j \frac{\partial h_i}{\partial t}\right) en^{(0)} + C^{(0)}\left(en_i \frac{\partial h_j}{\partial t} + en_j \frac{\partial h_i}{\partial t}\right)\right] \\ & - e^{-Y^{(0)}} \left[C_{ij} en^{(0)} + \frac{1}{2}\left(C_i en_j + C_j en_i\right) + C^{(0)} en_{ij}\right] \frac{\partial h^{(0)}}{\partial t} \end{aligned} \tag{7.4.102}$$

$$Q_{ij}(\mathrm{x},t) = -\left[\frac{1}{2}\left(ep_i \nabla h_j + ep_j \nabla h_i\right) + ep_{ij} \nabla\left(h^{(0)} + z\right)\right] \cdot \mathrm{n}(\mathrm{x}) / ep^{(0)}$$

方程(7.4.102)中 $g_{ij}(\mathbf{x},t)$和 $Q_{ij}(\mathbf{x},t)$是 $h_{ij}(\mathbf{x},t)$的线性函数，因而方程(7.4.102)是关于 $h_{ij}(\mathbf{x},t)$的线性方程。将含有 $h_{ij}(\mathbf{x},t)$的项移到方程的左边，其余的项留在方程的右边，可以发现方程的右端项与随机输入 f 或α的方差或它们的标准差的乘积成比例，这表明 $h_{ij}(\mathbf{x},t)$也具有同样的比例关系，所以式(7.4.94)中二阶水头的表达式是合理的。

3）不相关情况的一阶和二阶方程

当随机场 $f'(\mathrm{x})$ 和 $\alpha'(\mathrm{x})$ 不相关时，它们的 KL 展开需用独立的随机变量序列

$$f'(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \xi_i, \quad \alpha'(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i \tag{7.4.103}$$

显然此时相关系数 $\rho_{f'\alpha'} = 0$ 。

由 KL 展开的定义和性质可知，式(7.4.103)中的 f_i 和α_i 分别与随机场 f 和α的标准差成正比。由于水流系统的不确定性来源于不相关随机输入的不确定性，因而水头可用以下多项式展开表示

$$h^{(1)}(\mathrm{x},t) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(h_i^{\xi} \xi_i + h_i^{\eta} \eta_i\right) \tag{7.4.104}$$

$$h^{(2)}(\mathrm{x},t) = \sum_{i,j=1}^{\infty}\left(h_{ij}^{\xi\xi} \xi_i \xi_j + h_{ij}^{\xi\eta} \xi_i \eta_j + h_{ij}^{\eta\eta} \eta_i \eta_j\right) \tag{7.4.105}$$

将(7.4.103)~(7.4.105)带入式(7.4.82)、(7.4.83)、(7.4.86)以及(7.4.88)可得，

$$Y^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(Y_i^{\xi} \xi_i + Y_i^{\eta} \eta_i\right), \quad C^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(C_i^{\xi} \xi_i + C_i^{\eta} \eta_i\right) \tag{7.4.106}$$

$$\begin{aligned} Y^{(2)} &= \sum_{i,j=1}^{\infty}\left(Y_{ij}^{\xi\xi} \xi_i \xi_j + Y_{ij}^{\xi\eta} \xi_i \eta_j + Y_{ij}^{\eta\eta} \eta_i \eta_j\right) \\ C^{(2)} &= \sum_{i,j=1}^{\infty}\left(C_{ij}^{\xi\xi} \xi_i \xi_j + C_{ij}^{\xi\eta} \xi_i \eta_j + C_{ij}^{\eta\eta} \eta_i \eta_j\right) \end{aligned} \tag{7.4.107}$$

同样地，

$$en^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(en_i^{\xi}\xi_i + en_i^{\eta}\eta_i\right),\quad ep^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(ep_i^{\xi}\xi_i + ep_i^{\eta}\eta_i\right) \tag{7.4.108}$$

$$en^{(2)} = \sum_{i,j=1}^{\infty}\left(en_{ij}^{\xi\xi}\xi_i\xi_j + en_{ij}^{\xi\eta}\xi_i\eta_j + en_{ij}^{\eta\eta}\eta_i\eta_j\right) \tag{7.4.109}$$

式(7.4.106) ~ (7.4.109)中各展开项的系数为

$$\begin{aligned}
Y_i^{\xi} &= f_i + \langle\alpha\rangle h_i^{\xi}\\
Y_i^{\eta} &= \langle\alpha\rangle h_i^{\eta} + h^{(0)}\alpha_i\\
C_i^{\xi} &= C_{11}h_i^{\xi}\\
C_i^{\eta} &= C_{11}h_i^{\eta} + C_{12}\alpha_i\\
en_i^{\xi} &= -Y_i^{\xi}, en_i^{\eta} = -Y_i^{\eta}\\
ep_i^{\xi} &= Y_i^{\xi}, ep_i^{\eta} = Y_i^{\eta}
\end{aligned} \tag{7.4.110}$$

$$\begin{aligned}
&Y_{ij}^{\xi\xi} = \langle\alpha\rangle h_{ij}^{\xi\xi}, Y_{ij}^{\xi\eta} = \langle\alpha\rangle h_{ij}^{\xi\eta} + \frac{1}{2}\left(h_i^{\xi}\alpha_j + h_j^{\xi}\alpha_i\right), Y_{ij}^{\eta\eta} = \langle\alpha\rangle h_{ij}^{\eta\eta} + \frac{1}{2}\left(h_i^{\eta}\alpha_j + h_j^{\eta}\alpha_i\right)\\
&C_{ij}^{\xi\xi} = C_{21}h_{ij}^{\xi\xi} + C_{22}h_i^{\xi}h_i^{\xi}, C_{ij}^{\xi\eta} = C_{21}h_{ij}^{\xi\eta} + 2C_{22}h_i^{\xi}h_j^{\eta} + C_{23}h_i^{\xi}\alpha_i,\\
&C_{ij}^{\eta\eta} = C_{21}h_{ij}^{\eta\eta} + C_{22}h_i^{\eta}h_i^{\eta} + C_{23}h_i^{\eta}\alpha_i + C_{24}\alpha_i\alpha_i\\
&en_{ij}^{\xi\xi} = -Y_{ij}^{\xi\xi} + \frac{1}{2}Y_i^{\xi}Y_j^{\xi}, en_{ij}^{\xi\eta} = -Y_{ij}^{\xi\eta} + Y_i^{\xi}Y_j^{\eta}, en_{ij}^{\eta\eta} = -Y_{ij}^{\eta\eta} + \frac{1}{2}Y_i^{\eta}Y_i^{\eta}
\end{aligned} \tag{7.4.111}$$

令 p=1，将式(7.4.104)、(7.4.106)和(7.4.108)带入方程(7.4.74)，在方程两边同时乘以ξ_i 或η_i，i=1,2,…，取集平均，考虑到$\{\xi_i\}$和$\{\eta_i\}$的正交性可得

$$\begin{aligned}
&c_0\frac{\partial h_i^{\xi}(\mathrm{x},t)}{\partial t} = \nabla^2 h_i^{\xi}(\mathrm{x},t) + \nabla Y^{(0)}(\mathrm{x},t)\nabla h_i^{\xi}(\mathrm{x},t) + g_i^{\xi}(\mathrm{x},t)\\
&\qquad h_i^{\xi}(\mathrm{x},0) = 0,\quad \mathrm{x}\in\Omega\\
&\qquad h_i^{\xi}(\mathrm{x},t) = 0,\quad \mathrm{x}\in\Gamma_D\\
&\qquad \nabla h_i^{\xi}(\mathrm{x},t)\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x}) = Q_i^{\xi}(\mathrm{x},z),\quad \mathrm{x}\in\Gamma_N\\
&g_i^{\xi}(\mathrm{x},t) = \nabla Y_i^{\xi}\nabla\left(h^{(0)} + z\right) - e^{-Y^{(0)}}\left(C_i^{\xi}en^{(0)} + C^{(0)}en_i^{\xi}\right)\frac{\partial h^{(0)}}{\partial t} + e^{-Y^{(0)}}en_i^{\xi}g\\
&Q_i^{\xi}(\mathrm{x},t) = -ep_i^{\xi}\nabla\left(h^{(0)} + z\right)\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x})/ep^{(0)}
\end{aligned} \tag{7.4.112}$$

$$
\begin{aligned}
&c_0 \frac{\partial h_i^\eta(\mathrm{x},t)}{\partial t} = \nabla^2 h_i^\eta(\mathrm{x},t) + \nabla Y^{(0)}(\mathrm{x},t)\nabla h_i^\eta(\mathrm{x},t) + g_i^\eta(\mathrm{x},t) \\
&\qquad h_i^\eta(\mathrm{x},0) = 0, \quad \mathrm{x} \in \Omega \\
&\qquad h_i^\eta(\mathrm{x},t) = 0, \quad \mathrm{x} \in \Gamma_D \\
&\qquad \nabla h_i^\eta \cdot \mathrm{n}(\mathrm{x}) = Q_i^\eta \\
&g_i^\eta(\mathrm{x},t) = \nabla Y_i^\eta \nabla\left(h^{(0)} + z\right) - e^{-Y^{(0)}}\left(C_i^\eta en^{(0)} + C^{(0)} en_i^\eta\right)\frac{\partial h^{(0)}}{\partial t} + e^{-Y^{(0)}} en_i^\eta g \\
&Q_i^\eta(\mathrm{x},t) = -ep_i^\eta \nabla\left(h^{(0)} + z\right)\cdot \mathrm{n}\big|_{\Gamma_2} / ep^{(0)}
\end{aligned}
\tag{7.4.113}
$$

在方程(7.4.112)中 g_i^ξ 和 Q_i^ξ 是 h_i^ξ 的线性函数，因而方程(7.4.112)是关于 h_i^ξ 的线性方程。将含有 h_i^ξ 的项移到方程的左边，其余的项留在方程的右边，可以发现方程的右端项与随机输入 f 的标准差成比例，这表明 h_i^ξ 与随机输入 f 的标准差成比例。同样地从方程(7.4.113)也能看出 h_i^η 与随机输入 α 的标准差成比例。所以式(7.4.104)对一阶水头的表达式是合理的。

令 p=2，将式(7.4.105)、(7.4.107)和(7.4.109)代入方程(7.4.74)，同时合并关于不相关高斯随机变量 ξ_i 和 η_i 的同类项

$$
\sum_{i,j=1}^{\infty} L_{ij}^{\xi\xi}(h)\xi_i\xi_j + \sum_{i,j=1}^{\infty} L_{ij}^{\xi\eta}(h)\xi_i\eta_j + \sum_{i,j=1}^{\infty} L_{ij}^{\eta\eta}(h)\eta_i\eta_j = 0 \tag{7.4.114}
$$

式中，$L_{ij}^{\xi\xi}(h)$、$L_{ij}^{\xi\eta}(h)$、$L_{ij}^{\eta\eta}(h)$ 为作用在 h 上的算子。由于 $\{\xi_i\}$ 和 $\{\eta_i\}$ 的正交性，通过数学推导可以得到三个系列方程（Yang et. al., 2004）

$$
L_{ij}^{\xi\xi}(h) = 0, \quad L_{ij}^{\xi\eta}(h) = 0, \quad L_{ij}^{\eta\eta}(h) = 0 \tag{7.4.115}
$$

这些二阶方程的形式与方程(7.4.102)类似，具体推导过程可参考文献（Yang et. al., 2004），不再赘述。

（三） 基于 VG 模型的随机流动模型

（1）土壤随机参数展开

采用 van Genuchten-Mualem 模型，$f = \ln K_s$、$\beta = \ln \alpha$ 和 n 是系统输入，考虑为高斯随机场，均值和协方差函数已知，将它们分解为（李少龙，2006）

$$
f(\mathrm{x}) = \langle f(\mathrm{x})\rangle + f'(\mathrm{x}), \quad \beta(\mathrm{x}) = \langle \beta(\mathrm{x})\rangle + \beta'(\mathrm{x}), \quad n(\mathrm{x}) = \langle n(\mathrm{x})\rangle + n'(\mathrm{x}) \tag{7.4.116}
$$

式中，$\langle f(\mathrm{x})\rangle$、$\langle \alpha(\mathrm{x})\rangle$ 和 $\langle n(\mathrm{x})\rangle$ 为各随机场的均值部分，$f'(\mathrm{x})$、$\alpha'(\mathrm{x})$ 和 $n'(\mathrm{x})$ 为随机扰动分量。

由式(7.1.29)可得

$$Y(\mathrm{x},t)=f(\mathrm{x})+\frac{1}{2}\ln S(\mathrm{x},t)+2\ln\left\{1-\left[1-S^{1/m}(\mathrm{x},t)\right]^{m}\right\} \tag{7.4.117}$$

将 $Y(\mathbf{x},t)$在<f>、<β>、<n>和 $h^{(0)}$处泰勒展开

$$Y^{(0)}(\mathrm{x},t)=\left\langle f(\mathrm{x})\right\rangle+\frac{1}{2}\ln S_0+2\ln\left\{1-\left[1-S_0{}^{1/m_0}\right]^{m_0}\right\} \tag{7.4.118}$$

式中，$S_0=\left\{1+\left[-e^{\langle\beta(\mathrm{x})\rangle}h^{(0)}(\mathrm{x},t)\right]^{\langle n(\mathrm{x})\rangle}\right\}^{-m_0}$，$m_0=1-\dfrac{1}{\left\langle n(\mathrm{x})\right\rangle}$。

$$Y^{(1)}(\mathrm{x},t)=f'(\mathrm{x})+\left.\frac{\partial Y}{\partial h}\right|_{\langle\ \rangle}h^{(1)}(\mathrm{x},t)+\left.\frac{\partial Y}{\partial \beta}\right|_{\langle\ \rangle}\beta'(\mathrm{x})+\left.\frac{\partial Y}{\partial n}\right|_{\langle\ \rangle}n'(\mathrm{x}) \tag{7.4.119}$$

式中，$\left.\dfrac{\partial Y}{\partial h}\right|_{\langle\ \rangle}$和$\left.\dfrac{\partial Y}{\partial \beta}\right|_{\langle\ \rangle}$以及$\left.\dfrac{\partial Y}{\partial n}\right|_{\langle\ \rangle}$分别表示导函数在<$f$>、<$\beta$>、<$n$>、$h^{(0)}$和 S_0 处取值。下面根据多元函数求偏导法则，计算式(7.4.119)中的三个展开系数。

第一项：

$$\frac{\partial Y}{\partial h}=\frac{\partial Y}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial h}$$

由式(7.4.117)有

$$\frac{\partial Y}{\partial S}=\frac{1}{2S}+\frac{2\left(S^{-1/m}-1\right)^{m-1}}{1-\left(1-S^{1/m}\right)^{m}}$$

由式(7.1.29)有

$$\frac{\partial S}{\partial h}=\frac{1-n}{h}S\left(1-S^{1/m}\right)$$

第二项：

$$\frac{\partial Y}{\partial \beta}=\frac{\partial Y}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta}=(1-n)S\left(1-S^{1/m}\right)$$

第三项：

$$\frac{\partial Y}{\partial n}=\frac{\partial Y}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial n}+g_{Yn}$$

$$\frac{\partial S}{\partial n}=\frac{1}{n(n-1)}S\ln S-\frac{m}{n}S\left(1-S^{1/m}\right)\ln\left(S^{-1/m}-1\right)$$

$$g_{Yn}=-\frac{2}{n^2}\frac{\left(1-S^{1/m}\right)^{m}}{1-\left(1-S^{1/m}\right)^{m}}\left[\frac{S^{1/m}}{1-S^{1/m}}\frac{\ln S}{m}+\ln\left(1-S^{1/m}\right)\right]$$

这样就求出了展开式(7.4.119)中各项的系数，为简化符号表示，将式(7.4.119)简记作

$$Y^{(1)}(\mathrm{x},t)=f'(\mathrm{x})+Y_{11}h^{(1)}(\mathrm{x},t)+Y_{12}\beta'(\mathrm{x})+Y_{13}n'(\mathrm{x}) \tag{7.4.120}$$

根据多元函数泰勒展开

$$\begin{aligned}Y^{(2)}(\mathrm{x},t)=&\left.\frac{\partial Y}{\partial h}\right|_{\langle\,\rangle}h^{(2)}+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 Y}{\partial h^2}\right|_{\langle\,\rangle}h^{(1)}h^{(1)}+\left.\frac{\partial^2 Y}{\partial h\partial\beta}\right|_{\langle\,\rangle}h^{(1)}\beta'+\left.\frac{\partial^2 Y}{\partial h\partial n}\right|_{\langle\,\rangle}h^{(1)}n'\\&+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 Y}{\partial\beta^2}\right|_{\langle\,\rangle}\beta'\beta'+\left.\frac{\partial^2 Y}{\partial\beta\partial n}\right|_{\langle\,\rangle}\beta'n'+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 Y}{\partial n^2}\right|_{\langle\,\rangle}n'n'\end{aligned} \tag{7.4.121}$$

由多元函数求偏导法则可得

第二项：

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial h^2}=\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2}\left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)^2+\frac{\partial Y}{\partial S}\frac{\partial^2 S}{\partial h^2}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2}=-\frac{1}{2S^2}+\frac{2}{n-1}\frac{S^{-1/m-1}\left(S^{-1/m}-1\right)^{m-2}}{1-\left(1-S^{1/m}\right)^m}-\frac{2\left(S^{-1/m}-1\right)^{2m-2}}{\left[1-\left(1-S^{1/m}\right)^m\right]^2}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial h^2}=\frac{n-1}{h^2}S\left(1-S^{1/m}\right)\left[n-(2n-1)S^{1/m}\right]$$

第三项：

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial h\partial\beta}=\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2}\frac{\partial S}{\partial\beta}\frac{\partial S}{\partial h}+\frac{\partial Y}{\partial S}\frac{\partial^2 S}{\partial h\partial\beta}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial h\partial\beta}=\frac{n-1}{h}S\left(1-S^{1/m}\right)\left[n-1-(2n-1)S^{1/m}\right]$$

第四项：

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial h\partial n}=\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2}\frac{\partial S}{\partial n}+\frac{\partial^2 Y}{\partial S\partial n}\right)\frac{\partial S}{\partial h}+\frac{\partial Y}{\partial S}\frac{\partial^2 S}{\partial h\partial n}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 Y}{\partial S\partial n}=-2\frac{S^{(1/m-1)}\left(1-S^{1/m}\right)^{m-2}}{n^2m^2\left[1-\left(1-S^{1/m}\right)^m\right]^2}&\left\{\left[1-mS^{1/m}-\left(1-S^{1/m}\right)^m\right]\ln S\right.\\&\left.-m^2\left(1-S^{1/m}\right)\ln\left(1-S^{1/m}\right)\right\}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial h\partial n}=-\frac{S}{h}\left(1-S^{1/m}\right)\left\{\frac{\ln S}{n}-m^2\left[1-\left(1+\frac{1}{m}\right)S^{1/m}\right]\ln\left(S^{-1/m}-1\right)+1\right\}$$

第五项：

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial\beta^2}=\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\beta}\right)^2+\frac{\partial Y}{\partial S}\frac{\partial^2 S}{\partial\beta^2}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^2}=(n-1)S\left(1-S^{1/m}\right)\left[n-1-(2n-1)S^{1/m}\right]$$

第六项：

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \beta \partial n}=\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2}\frac{\partial S}{\partial n}+\frac{\partial^2 Y}{\partial S \partial n}\right)\frac{\partial S}{\partial \beta}+\frac{\partial Y}{\partial S}\frac{\partial^2 S}{\partial \beta \partial n}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \beta \partial n}=-S\left(1-S^{1/m}\right)\left\{\frac{\ln S}{n}-m^2\left[1-\left(1+\frac{1}{m}\right)S^{1/m}\right]\ln\left(S^{-1/m}-1\right)+1\right\}$$

第七项：

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial n^2}=\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2}\frac{\partial S}{\partial n}+\frac{\partial^2 Y}{\partial S \partial n}\right)\frac{\partial S}{\partial n}+\frac{\partial Y}{\partial S}\frac{\partial^2 S}{\partial n^2}+\frac{\partial g_{Yn}}{\partial n}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 S}{\partial n^2}=&-2\frac{n+1}{(n-1)n^3}S\ln S-\frac{2S}{n^3}\left(1-S^{1/m}\right)\times\\&\left[n(2-n)+(2n-1)(n-1)S^{1/m}+\ln S\left[-\frac{\ln S}{m}+\ln\left(1-S^{1/m}\right)\right]\right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{Yn}}{\partial n}=&\frac{2\left(1-S^{1/m}\right)^{m-2}S^{1/m}}{m^3n^4\left[1-\left(1-S^{1/m}\right)^m\right]^2}\left\{2\left[-1+mS^{1/m}+\left(1-S^{1/m}\right)^m\right]\ln S\right.\\&\left.+2m^3\left(-2+S^{1/m}+S^{-1/m}\right)\ln\left(1-S^{1/m}\right)+2m^2\left(1-S^{1/m}\right)\ln S\ln\left(1-S^{1/m}\right)\right\}\\&-\frac{4\left(1-S^{1/m}\right)^{m-1}}{mn^3\left[1-\left(1-S^{1/m}\right)^m\right]}\left[S^{1/m}\ln S+m\left(1-S^{1/m}\right)\ln\left(1-S^{1/m}\right)\right]\end{aligned}$$

以上推导了展开式(7.4.121)中各项的系数，将其简记为

$$Y^{(2)}=Y_{21}h^{(2)}+Y_{22}\left(h^{(1)}\right)^2+Y_{23}h^{(1)}\beta'+Y_{24}h^{(1)}n'+Y_{25}\beta'^2+Y_{26}\beta'n'+Y_{27}n'^2 \quad (7.4.122)$$

下面我们推导容水度 $C(\mathbf{x},t)$的展开式，由式(7.1.29)可得

$$C(\mathrm{x},t)=\alpha(\mathrm{x})\left[n(\mathrm{x})-1\right]\left(\theta_s-\theta_r\right)S^{1/m}(\mathrm{x},t)\left[1-S^{1/m}(\mathrm{x},t)\right]^m \quad (7.4.123)$$

将 $C(\mathbf{x},t)$在 $h^{(0)}$、$\langle\beta\rangle$、$\langle n\rangle$处用泰勒展开

$$C^{(0)}(\mathrm{x},t)=\left(\theta_s-\theta_r\right)\left[\langle n(\mathrm{x})\rangle-1\right]e^{\langle\beta(\mathrm{x})\rangle}S_0^{1/m_0}\left(1-S_0^{1/m_0}\right)^{m_0} \quad (7.4.124)$$

$$C^{(1)}(\mathrm{x},t)=\left.\frac{\partial C}{\partial h}\right|_{\langle\,\rangle}h^{(1)}(\mathrm{x},t)+\left.\frac{\partial C}{\partial \beta}\right|_{\langle\,\rangle}\beta'(\mathrm{x})+\left.\frac{\partial C}{\partial n}\right|_{\langle\,\rangle}n'(\mathrm{x}) \quad (7.4.125)$$

式中，$\left.\frac{\partial C}{\partial h}\right|_{\langle\,\rangle}$ 和 $\left.\frac{\partial C}{\partial \beta}\right|_{\langle\,\rangle}$ 以及 $\left.\frac{\partial C}{\partial n}\right|_{\langle\,\rangle}$ 分别表示导函数在 $h^{(0)}$、$\langle\beta\rangle$、$\langle n\rangle$和 $S^{(0)}$处取值。

根据多元函数求导法则，由式(7.4.123)可知

第一项：

$$\frac{\partial C}{\partial h}=\frac{\partial C}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial h}$$

$$\frac{\partial C}{\partial S}=e^{\beta}(\theta_s-\theta_r)S^{1/m-1}\left(1-S^{1/m}\right)^{m-1}\left[n-(2n-1)S^{1/m}\right]$$

第二项：

$$\frac{\partial C}{\partial \beta}=\frac{\partial C}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial \beta}+C$$

第三项：

$$\frac{\partial C}{\partial n}=\frac{\partial C}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial n}+g_{Cn}$$

$$g_{Cn}=\frac{C}{(n-1)^2}\left\{m^2\ln\left(1-S^{1/m}\right)+\frac{(m+1)S^{1/m}-1}{1-S^{1/m}}\ln S+n-1\right\}$$

这样就求得了展开式(7.4.122)中的系数，将该式记作

$$C^{(1)}(\mathrm{x},t)=C_{11}h^{(1)}(\mathrm{x},t)+C_{12}\beta'(\mathrm{x})+C_{13}n'(\mathrm{x}) \tag{7.4.126}$$

由多元函数泰勒展开

$$\begin{aligned}C^{(2)}(\mathrm{x},t)=&\left.\frac{\partial C}{\partial h}\right|_{\langle\,\rangle}h^{(2)}+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 C}{\partial h^2}\right|_{\langle\,\rangle}h^{(1)}h^{(1)}+\left.\frac{\partial^2 C}{\partial h\partial\beta}\right|_{\langle\,\rangle}h^{(1)}\beta'+\left.\frac{\partial^2 C}{\partial h\partial n}\right|_{\langle\,\rangle}h^{(1)}n'\\&+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 C}{\partial \beta^2}\right|_{\langle\,\rangle}\beta'\beta'+\left.\frac{\partial^2 C}{\partial\beta\partial n}\right|_{\langle\,\rangle}\beta'n'+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 C}{\partial n^2}\right|_{\langle\,\rangle}n'n'\end{aligned} \tag{7.4.127}$$

根据复合函数求导法则

$$\frac{\partial^2 C}{\partial h^2}=\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)^2+\frac{\partial C}{\partial S}\frac{\partial^2 S}{\partial h^2}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}=\frac{n}{m}e^{\beta}(\theta_s-\theta_r)\left(1-S^{1/m}\right)^{m-2}S^{1/m-2}\left[(1+m)S^{2/m}+(m-2)(m+1)S^{1/m}+1-m\right]$$

展开式(7.4.127)中其他各项系数的推导与上述类似，不再赘述，将式(7.4.127)简记为

$$C^{(2)}=C_{21}h^{(2)}+C_{22}\left(h^{(1)}\right)^2+C_{23}h^{(1)}\beta'+C_{24}h^{(1)}n'+C_{25}\beta'^2+C_{26}\beta'n'+C_{27}n'^2 \tag{7.4.128}$$

由于 VG 非饱和水力模型的复杂非线性，Y 和 C 展开系数的推导过程相对于 GR 模型的情形而言也是极其繁琐的。

（2）基于 KL 展开的摄动方程

1）零阶方程

在方程(7.4.74)中令 p=0，将式(7.4.118)和(7.4.124)代入其中可得

$$c_0\frac{\partial h^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial t}=\nabla^2 h^{(0)}(\mathrm{x},t)+a_1\nabla h^{(0)}(\mathrm{x},t)+e^{-Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}en^{(0)}g(\mathrm{x},t)+a_3$$

$$h^{(0)}(\mathrm{x},0)=h_{ini}(\mathrm{x}),\quad \mathrm{x}\in\Omega \tag{7.4.129}$$

$$h^{(0)}(\mathrm{x},t)=h_d(\mathrm{x},t),\quad \mathrm{x}\in\Gamma_D$$

$$\nabla h^{(0)}(\mathrm{x},t)\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x})=-e^{-Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}Q_n(\mathrm{x},t)/ep^{(0)}-\nabla z\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x}),x\in\Gamma_N$$

式中：
$$a_1=\frac{\partial Y^{(0)}}{\partial S_0}\nabla S_0+g_{Yn}\nabla\langle n\rangle$$

$$a_3=\frac{\partial Y^{(0)}}{\partial S_0}\frac{\partial S_0}{\partial z}+g_{Yn}\frac{\partial\langle n\rangle}{\partial z}+\nabla\langle f\rangle\nabla\left[h^{(0)}+z\right]$$

$$e^{Y^{(0)}}=e^{\langle f(x)\rangle}\sqrt{S_0}\left[1-\left(1-S_0^{\ 1/m_0}\right)^{m_0}\right]^2$$

方程(7.4.129)中的系数都是 $h^{(0)}$的函数，因而该方程是关于 $h^{(0)}$的非线性方程。随机的一阶和二阶方程中包含的随机输入有三个随机场 f、β和 n，它们之间的相关关系也更为复杂，可能两个随机场相关而与另一个随机场不相关，或者三个随机场之间表现出弱相关性等等，按照随机场完全相关和不相关两种情况分别进行建模。

2）完全相关情况的一阶和二阶方程

假定随机场 f' 、β' 和 n' 完全相关，它们的 KL 展开可采用同一随机变量序列

$$f'(\mathrm{x})=\sum_{i=1}^{\infty}f_i(\mathrm{x})\xi_i,\quad \beta'(\mathrm{x})=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i(\mathrm{x})\xi_i,\quad n'(\mathrm{x})=\sum_{i=1}^{\infty}n_i(\mathrm{x})\xi_i \tag{7.4.130}$$

水头作为待求量，其统计特征事先是不知道的，可用以下随机多项式展开表示

$$h^{(1)}(\mathrm{x},t)=\sum_{i=1}^{\infty}h_i\xi_i \tag{7.4.131}$$

$$h^{(2)}(\mathrm{x},t)=\sum_{i,j=1}^{\infty}h_{ij}\xi_i\xi_j \tag{7.4.132}$$

将式(7.4.130)~(7.4.132)代入式(7.4.120)、(7.4.122)、(7.4.126)及(7.4.128)可得

$$Y^{(1)}=\sum_{i=1}^{\infty}Y_i\xi_i,\quad C^{(1)}=\sum_{i=1}^{\infty}C_i\xi_i \tag{7.4.133}$$

$$Y^{(2)}=\sum_{i,j=1}^{\infty}Y_{ij}\xi_i\xi_j,\quad C^{(2)}=\sum_{i,j=1}^{\infty}C_{ij}\xi_i\xi_j \tag{7.4.134}$$

同样地，

$$en^{(1)}=\sum_{i=1}^{\infty}en_i\xi_i,\quad ep^{(1)}=\sum_{i=1}^{\infty}ep_i\xi_i \tag{7.4.135}$$

$$en^{(2)}=\sum_{i,j=1}^{\infty}en_{ij}\xi_i\xi_j,\quad ep^{(1)}=\sum_{i=1}^{\infty}ep_{ij}\xi_i\xi_j \tag{7.4.136}$$

式(7.4.133)和(7.4.134)中各展开项的系数为

$$
\begin{aligned}
Y_i &= f_i + Y_{11}h_i + Y_{12}\beta_i + Y_{13}n_i \\
C_i &= C_{11}h_i + C_{12}\beta_i + C_{13}n_i \\
en_i &= -Y_i,\quad ep_i = Y_i
\end{aligned}
\tag{7.4.137}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_{ij} &= Y_{21}h_{ij} + Y_{22}h_ih_j + \frac{1}{2}Y_{23}\left(h_i\beta_j + h_j\beta_i\right) + \frac{1}{2}Y_{24}\left(h_in_j + h_jn_i\right) \\
&\quad + Y_{25}\beta_i\beta_j + \frac{1}{2}Y_{26}\left(\beta_in_j + \beta_jn_i\right) + Y_{27}n_in_j \\
C_{ij} &= C_{21}h_{ij} + C_{22}h_ih_j + \frac{1}{2}C_{23}\left(h_i\beta_j + h_j\beta_i\right) + \frac{1}{2}C_{24}\left(h_in_j + h_jn_i\right) \\
&\quad + C_{25}\beta_i\beta_j + \frac{1}{2}C_{26}\left(\beta_in_j + \beta_jn_i\right) + C_{27}n_in_j \\
en_{ij} &= -Y_{ij} + \frac{1}{2}Y_iY_j,\quad ep_{ij} = Y_{ij} + \frac{1}{2}Y_iY_j
\end{aligned}
\tag{7.4.138}
$$

令 p=1，将式(7.4.131)、(7.4.133)和(7.4.135)带入方程(7.4.74)，在方程两边同时乘以ξ_i，i=1,2,…，然后取集平均，利用式(7.4.8)可得

$$
\begin{aligned}
&c_0\frac{\partial h_i(\mathrm{x},t)}{\partial t} = \nabla^2 h_i(\mathrm{x},t) + \nabla Y^{(0)}(\mathrm{x},t)\nabla h_i(\mathrm{x},t) + g_i(\mathrm{x},t) \\
&\qquad h_i(\mathrm{x},0) = 0,\quad \mathrm{x}\in\Omega \\
&\qquad h_i(\mathrm{x},t) = 0,\quad \mathrm{x}\in\Gamma_D \\
&\qquad \nabla h_i(\mathrm{x},t)\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x}) = Q_i(\mathrm{x},t) \\
&g_i(\mathrm{x},t) = \nabla Y_i(\mathrm{x},t)\nabla\left[h^{(0)}(\mathrm{x},t)+z\right] + e^{-Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}en_i(\mathrm{x},t)g(\mathrm{x},t) \\
&\qquad - e^{-Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}\left[C_i(\mathrm{x},t)en^{(0)} + C^{(0)}(\mathrm{x},t)en_i(\mathrm{x},t)\right]\frac{\partial h^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial t} \\
&Q_i(\mathrm{x},t) = -ep_i\nabla\left[h^{(0)}(\mathrm{x},t)+z\right]\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x})/ep^{(0)}
\end{aligned}
\tag{7.4.139}
$$

令 p=2，将式(7.4.132)、(7.4.134)和(7.4.136)代入方程(7.4.74)，在方程两边同时乘以$\xi_l\xi_n$，l, n=1,2…，考虑到{ξ_i}的正交性，取集平均后可得

$$
\begin{aligned}
&c_0\frac{\partial h_{ij}(\mathrm{x},t)}{\partial t} = \nabla^2 h_{ij}(\mathrm{x},t) + \nabla Y^{(0)}(\mathrm{x},t)\nabla h_{ij}(\mathrm{x},t) + g_{ij}(\mathrm{x},t) \\
&\qquad h_{ij}(\mathrm{x},0) = 0,\quad \mathrm{x}\in\Omega \\
&\qquad h_{ij}(\mathrm{x},t) = 0,\quad \mathrm{x}\in\Gamma_D \\
&\qquad \nabla h_{ij}(\mathrm{x},t)\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x}) = Q_{ij}(\mathrm{x},t),\mathrm{x}\in\Gamma_N
\end{aligned}
\tag{7.4.140}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{ij}(\mathrm{x},t) &= \frac{1}{2}\left(\nabla Y_i \nabla h_j + \nabla Y_j \nabla h_i\right) + \nabla Y_{ij} \nabla\left(h^{(0)} + z\right) + e^{-Y^{(0)}} en_{ij} g \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{-Y^{(0)}} \left[\left(C_i \frac{\partial h_j}{\partial t} + C_j \frac{\partial h_i}{\partial t}\right) en^{(0)} + C^{(0)}\left(en_i \frac{\partial h_j}{\partial t} + en_j \frac{\partial h_i}{\partial t}\right)\right] \\
&\quad - e^{-Y^{(0)}} \left[C_{ij} en^{(0)} + \frac{1}{2}\left(C_i en_j + C_j en_i\right) + C^{(0)} en_{ij}\right] \frac{\partial h^{(0)}}{\partial t} \\
Q_{ij}(\mathrm{x},t) &= -\left[\frac{1}{2}\left(ep_i \nabla h_j + ep_j \nabla h_i\right) + ep_{ij} \nabla\left(h^{(0)} + z\right)\right] \cdot \mathrm{n}\Big|_{\Gamma_2} / ep^{(0)}
\end{aligned} \tag{7.4.141}
$$

3）不相关情况的一阶和二阶方程

当随机场 f' 、β' 和 n' 不相关时，它们的 KL 展开需用独立的随机变量序列

$$
f'(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(\mathrm{x}) \xi_i ,\quad \beta'(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(\mathrm{x}) \eta_i ,\quad n'(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i(\mathrm{x}) \varphi_i \tag{7.4.142}
$$

水头可用以下随机多项式展开表示

$$
h^{(1)}(\mathrm{x},t) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i^{\xi}(\mathrm{x},t) \xi_i + \sum_{j=1}^{\infty} h_j^{\eta}(\mathrm{x},t) \eta_j + \sum_{k=1}^{\infty} h_k^{\varphi}(\mathrm{x},t) \varphi_k \tag{7.4.143}
$$

$$
\begin{aligned}
h^{(2)}(\mathrm{x},t) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} h_{ij}^{\xi\xi}(\mathrm{x},t) \xi_i \xi_j + \sum_{i,j=1}^{\infty} h_{ij}^{\eta\eta}(\mathrm{x},t) \eta_i \eta_j + \sum_{i,j=1}^{\infty} h_{ij}^{\varphi\varphi}(\mathrm{x},t) \varphi_i \varphi_j \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{\infty} h_{ij}^{\xi\eta}(\mathrm{x},t) \xi_i \eta_j + \sum_{i,j=1}^{\infty} h_{ij}^{\xi\varphi}(\mathrm{x},t) \xi_i \varphi_j + \sum_{i,j=1}^{\infty} h_{ij}^{\eta\varphi}(\mathrm{x},t) \eta_i \varphi_j
\end{aligned} \tag{7.4.144}
$$

将(7.4.142)~(7.4.144)带入式(7.4.120)、(7.4.122)、(7.4.126)及(7.4.128)可得

$$
\begin{aligned}
Y^{(1)}(\mathrm{x},t) &= \sum_{i=1}^{\infty} Y_i^{\xi}(\mathrm{x},t) \xi_i + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^{\eta}(\mathrm{x},t) \eta_j + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^{\varphi}(\mathrm{x},t) \varphi_k \\
C^{(1)}(\mathrm{x},t) &= \sum_{i=1}^{\infty} C_i^{\xi}(\mathrm{x},t) \xi_i + \sum_{j=1}^{\infty} C_j^{\eta}(\mathrm{x},t) \eta_j + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{\varphi}(\mathrm{x},t) \varphi_k
\end{aligned} \tag{7.4.145}
$$

$$
\begin{aligned}
Y^{(2)}(\mathrm{x},t) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} Y_{ij}^{\xi\xi}(\mathrm{x},t) \xi_i \xi_j + \sum_{i,j=1}^{\infty} Y_{ij}^{\eta\eta}(\mathrm{x},t) \eta_i \eta_j + \sum_{i,j=1}^{\infty} Y_{ij}^{\varphi\varphi}(\mathrm{x},t) \varphi_i \varphi_j \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{\infty} Y_{ij}^{\xi\eta}(\mathrm{x},t) \xi_i \eta_j + \sum_{i,j=1}^{\infty} Y_{ij}^{\xi\varphi}(\mathrm{x},t) \xi_i \varphi_j + \sum_{i,j=1}^{\infty} Y_{ij}^{\eta\varphi}(\mathrm{x},t) \eta_i \varphi_j \\
C^{(2)}(\mathrm{x},t) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} C_{ij}^{\xi\xi}(\mathrm{x},t) \xi_i \xi_j + \sum_{i,j=1}^{\infty} C_{ij}^{\eta\eta}(\mathrm{x},t) \eta_i \eta_j + \sum_{i,j=1}^{\infty} C_{ij}^{\varphi\varphi}(\mathrm{x},t) \varphi_i \varphi_j \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{\infty} C_{ij}^{\xi\eta}(\mathrm{x},t) \xi_i \eta_j + \sum_{i,j=1}^{\infty} C_{ij}^{\xi\varphi}(\mathrm{x},t) \xi_i \varphi_j + \sum_{i,j=1}^{\infty} C_{ij}^{\eta\varphi}(\mathrm{x},t) \eta_i \varphi_j
\end{aligned} \tag{7.4.146}
$$

式(7.4.145)和式(7.4.146)中各展开项的系数为

$$
\begin{aligned}
&Y_i^{\xi}(\mathrm{x},t)=f_i+Y_{11}h_i^{\xi},\ \ Y_j^{\eta}(\mathrm{x},t)=Y_{11}h_j^{\eta}+Y_{12}\beta_j,\quad Y_k^{\varphi}(\mathrm{x},t)=Y_{11}h_k^{\varphi}+Y_{13}n_k\\
&C_i^{\xi}(\mathrm{x},t)=C_{11}h_i^{\xi},\qquad C_j^{\eta}(\mathrm{x},t)=C_{11}h_j^{\eta}+C_{12}\beta_j,\ \ C_k^{\varphi}(\mathrm{x},t)=C_{11}h_k^{\varphi}+C_{13}n_i
\end{aligned}
\tag{7.4.147}
$$

$$
\begin{aligned}
&Y_{ij}^{\xi\xi}(\mathrm{x},t)=Y_{21}h_{ij}^{\xi\xi}+Y_{22}\left(h_i^{\xi}\right)^2,\\
&Y_{ij}^{\eta\eta}(\mathrm{x},t)=Y_{21}h_{ij}^{\eta\eta}+Y_{22}\left(h_i^{\eta}\right)^2+\frac{1}{2}Y_{23}\left(h_i^{\eta}\beta_j+h_j^{\eta}\beta_i\right)+Y_{25}\beta_i\beta_j,\\
&Y_{ij}^{\varphi\varphi}(\mathrm{x},t)=Y_{21}h_{ij}^{\varphi\varphi}+Y_{22}\left(h_i^{\varphi}\right)^2+\frac{1}{2}Y_{24}\left(h_i^{\varphi}n_j+h_j^{\varphi}n_i\right)+Y_{27}n_in_j,\\
&Y_{ij}^{\xi\eta}(\mathrm{x},t)=Y_{21}h_{ij}^{\xi\eta}+Y_{22}\left(h_i^{\xi}h_j^{\eta}+h_j^{\xi}h_i^{\eta}\right),\\
&Y_{ij}^{\xi\varphi}(\mathrm{x},t)=Y_{21}h_{ij}^{\xi\varphi}+Y_{22}\left(h_i^{\xi}h_j^{\varphi}+h_j^{\xi}h_i^{\varphi}\right)+\frac{1}{2}Y_{24}\left(h_i^{\xi}n_j+h_j^{\xi}n_i\right),\\
&Y_{ij}^{\eta\varphi}(\mathrm{x},t)=Y_{21}h_{ij}^{\eta\varphi}+Y_{22}\left(h_i^{\eta}h_j^{\varphi}+h_j^{\eta}h_i^{\varphi}\right)+\frac{1}{2}Y_{24}\left(h_i^{\eta}n_j+h_j^{\eta}n_i\right)+\frac{1}{2}Y_{26}\left(\beta_in_j+\beta_jn_i\right)
\end{aligned}
\tag{7.4.148}
$$

$$
\begin{aligned}
&C_{ij}^{\xi\xi}=C_{21}h_{ij}^{\xi\xi}+C_{22}\left(h_i^{\xi}\right)^2,\\
&C_{ij}^{\eta\eta}=C_{21}h_{ij}^{\eta\eta}+C_{22}\left(h_i^{\eta}\right)^2+\frac{1}{2}C_{23}\left(h_i^{\eta}\beta_j+h_j^{\eta}\beta_i\right)+C_{25}\beta_i\beta_j,\\
&C_{ij}^{\varphi\varphi}=C_{21}h_{ij}^{\varphi\varphi}+C_{22}\left(h_i^{\varphi}\right)^2+\frac{1}{2}C_{24}\left(h_i^{\varphi}n_j+h_j^{\varphi}n_i\right)+C_{27}n_in_j,\\
&C_{ij}^{\xi\eta}=C_{21}h_{ij}^{\xi\eta}+C_{22}\left(h_i^{\xi}h_j^{\eta}+h_j^{\xi}h_i^{\eta}\right),\\
&C_{ij}^{\xi\varphi}=C_{21}h_{ij}^{\xi\varphi}+C_{22}\left(h_i^{\xi}h_j^{\varphi}+h_j^{\xi}h_i^{\varphi}\right)+\frac{1}{2}C_{24}\left(h_i^{\xi}n_j+h_j^{\xi}n_i\right),\\
&C_{ij}^{\eta\varphi}=C_{21}h_{ij}^{\eta\varphi}+C_{22}\left(h_i^{\eta}h_j^{\varphi}+h_j^{\eta}h_i^{\varphi}\right)+\frac{1}{2}C_{24}\left(h_i^{\eta}n_j+h_j^{\eta}n_i\right)+\frac{1}{2}C_{26}\left(\beta_in_j+\beta_jn_i\right)
\end{aligned}
\tag{7.4.149}
$$

同样地，$en^{(1)}$、$en^{(2)}$、$ep^{(1)}$、$ep^{(2)}$的展开式与上面类似，很容易由式(7.4.72)、式(7.4.145)和式(7.4.146)求得，此处不再赘述。

令 p=1，将式(7.4.142)、(7.4.143)、(7.4.145)以及 $en^{(1)}$和 $ep^{(1)}$的展开式代入方程(7.4.74)，在方程两边同时乘以ξ_i或η_i或φ_i，i=1,2,…，取集平均，利用{ξ_i}、{η_i}和{φ_i}的正交性可得一阶展开系数方程

$$
\begin{aligned}
&c_0\frac{\partial h_i^{\zeta}(\mathrm{x},t)}{\partial t}=\nabla^2h_i^{\zeta}(\mathrm{x},t)+\nabla Y^{(0)}(\mathrm{x},t)\nabla h_i^{\zeta}(\mathrm{x},t)+g_i^{\zeta}(\mathrm{x},t)\\
&\qquad h_i^{\zeta}(\mathrm{x},0)=0,\ \ \mathrm{x}\in\Omega\\
&\qquad h_i^{\zeta}(\mathrm{x},t)=0,\ \ \mathrm{x}\in\Gamma_D\\
&\qquad \nabla h_i^{\zeta}(\mathrm{x},t)\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x})=Q_i^{\zeta}(\mathrm{x},t),\ \ \mathrm{x}\in\Gamma_N\\
&g_i^{\zeta}(\mathrm{x},t)=\nabla Y_i^{\zeta}\nabla\left[h^{(0)}(\mathrm{x},t)+z\right]+e^{-Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}en_i^{\zeta}(\mathrm{x},t)g(\mathrm{x},t)\\
&\qquad -e^{-Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}\left[C_i^{\zeta}(\mathrm{x},t)en^{(0)}+C^{(0)}(\mathrm{x},t)en_i^{\zeta}(\mathrm{x},t)\right]\frac{\partial h^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial t}\\
&Q_i^{\zeta}(\mathrm{x},t)=-ep_i^{\zeta}(\mathrm{x},t)\nabla\left[h^{(0)}(\mathrm{x},t)+z\right]\cdot\mathrm{n}(\mathrm{x})/ep^{(0)}
\end{aligned}
\tag{7.4.150}
$$

式中，ζ分别代表ξ、η和φ。

令 p=2，将式(7.4.142)、式(7.4.144)、式(7.4.146)以及 $en^{(2)}$和 $ep^{(2)}$的展开式代入方程(7.4.74)，充分利用$\{\xi_i\}$、$\{\eta_i\}$和$\{\varphi_i\}$的正交性，取集平均后得

$$
\begin{aligned}
&c_0 \frac{\partial h_{ij}^{\zeta\mu}(\mathrm{x},t)}{\partial t} = \nabla^2 h_{ij}^{\zeta\mu}(\mathrm{x},t) + \nabla Y^{(0)}(\mathrm{x},t)\nabla h_{ij}^{\zeta\mu}(\mathrm{x},t) + g_{ij}^{\zeta\mu}(\mathrm{x},t) \\
&h_{ij}^{\zeta\mu}(\mathrm{x},0) = 0, \quad \mathrm{x} \in \Omega \\
&h_{ij}^{\zeta\mu}(\mathrm{x},t) = 0, \quad \mathrm{x} \in \Gamma_D \\
&\nabla h_{ij}^{\zeta\mu}(\mathrm{x},t) \cdot \mathrm{n}(\mathrm{x}) = Q_{ij}^{\zeta\mu}, \quad \mathrm{x} \in \Gamma_N \\
&g_{ij}^{\zeta\mu}(\mathrm{x},t) = \frac{1}{2}\left(\nabla Y_i^{\zeta} \nabla h_j^{\mu} + \nabla Y_j^{\zeta} \nabla h_i^{\mu}\right) + \nabla Y_{ij}^{\zeta\mu} \nabla\left(h^{(0)} + z\right) + e^{-Y^{(0)}} en_{ij}^{\zeta\mu} g \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{-Y^{(0)}} \left[\left(C_i^{\zeta} \frac{\partial h_j^{\mu}}{\partial t} + C_j^{\zeta} \frac{\partial h_i^{\mu}}{\partial t}\right) en^{(0)} + C^{(0)}\left(en_i^{\zeta} \frac{\partial h_j^{\mu}}{\partial t} + en_j^{\zeta} \frac{\partial h_i^{\mu}}{\partial t}\right)\right] \\
&\quad - e^{-Y^{(0)}} \left[C_{ij}^{\zeta\mu} en^{(0)} + \frac{1}{2}\left(C_i^{\zeta} en_j^{\mu} + C_j^{\zeta} en_i^{\mu}\right) + C^{(0)} en_{ij}^{\zeta\mu}\right] \frac{\partial h^{(0)}}{\partial t} \\
&Q_{ij}^{\zeta\mu}(\mathrm{x},t) = -\left[\frac{1}{2}\left(ep_i^{\zeta} \nabla h_j^{\mu} + ep_j^{\zeta} \nabla h_i^{\mu}\right) + ep_{ij}^{\zeta\mu} \nabla\left(h^{(0)} + z\right)\right] \cdot \mathrm{n}(\mathrm{x}) / ep^{(0)}
\end{aligned}
\tag{7.4.151}
$$

式中，ζ和μ分别代表ξ、η和φ。

（四） 水流变量的统计矩

上述数学推导得到了关于水头展开系数的控制方程，求解这些方程后并结合水头函数的混沌展开，就可得到水头的随机描述，也就是得到了水头的随机函数，进而可以计算水流变量如水头、含水率、流速等的统计矩。

（1）水头的统计矩

将水头展开为级数$h(\mathrm{x},t) = h^{(0)} + h^{(1)} + h^{(2)}$，由方程(7.4.74)可知，$\left\langle h^{(0)} \right\rangle = h^{(0)}$，$\left\langle h^{(1)} \right\rangle = 0$，那么对水头展开式取集平均有

$$
\left\langle h(\mathrm{x},t) \right\rangle = h^{(0)}(\mathrm{x},t) + \left\langle h^{(2)}(\mathrm{x},t) \right\rangle \tag{7.4.152}
$$

$\left\langle h \right\rangle = h^{(0)}$是关于随机输入标准差$\sigma$的零阶或一阶水头均值，而式(7.4.152)是关于随机输入标准差σ的二阶水头均值，其右边的第二项就是水头均值的二阶修正项。由式(7.4.68)减去式(7.4.152)可得

$$
h'(\mathrm{x},t) = h^{(1)}(\mathrm{x},t) + h^{(2)}(\mathrm{x},t) - \left\langle h^{(2)}(\mathrm{x},t) \right\rangle \tag{7.4.153}
$$

$h' = h^{(1)}$是关于随机输入标准差σ的一阶水头扰动，式(7.4.153)是关于σ的二阶扰动。由式(7.4.153)可以得到水头关于σ^2的一阶协方差

$$
C_h(\mathrm{x},t;\mathrm{y},\tau) = \left\langle h^{(1)}(\mathrm{x},t) h^{(1)}(\mathrm{y},\tau) \right\rangle \tag{7.4.154}
$$

1）相关情况下的水头均值

将式(7.4.94)或(7.4.132)代入式(7.4.152)可得

$$\left\langle h(\mathrm{x},t)\right\rangle = h^{(0)}(\mathrm{x},t)+\sum_{i=1}^{\infty}h_{ii}(\mathrm{x},t) \tag{7.4.155}$$

2）不相关情况下的水头均值

将式(7.4.105)代入式(7.4.152)可得基于 GR 非饱和水力模型的水头二阶均值

$$\left\langle h(\mathrm{x},t)\right\rangle = h^{(0)}(\mathrm{x},t)+\sum_{i=1}^{\infty}\left[h_{ii}^{\xi\xi}(\mathrm{x},t)+h_{ii}^{\eta\eta}(\mathrm{x},t)\right] \tag{7.4.156}$$

将式(7.4.144)代入式(7.4.152)可得基于 VG 非饱和水力模型的水头二阶均值

$$\left\langle h(\mathrm{x},t)\right\rangle = h^{(0)}(\mathrm{x},t)+\sum_{i=1}^{\infty}\left[h_{ii}^{\xi\xi}(\mathrm{x},t)+h_{ii}^{\eta\eta}(\mathrm{x},t)+h_{ii}^{\varphi\varphi}(\mathrm{x},t)\right] \tag{7.4.157}$$

3）相关情况下的水头(协)方差

将式(7.4.93)或(7.4.131)代入式(7.4.154)可得

$$C_h(\mathrm{x},t;\mathrm{y},\tau)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[h_i(\mathrm{x},t)h_i(\mathrm{y},\tau)\right] \tag{7.4.158}$$

4）不相关情况下的水头(协)方差

将式(7.4.104)代入式(7.4.154)可得基于 GR 模型的水头协方差

$$C_h(\mathrm{x},t;\mathrm{y},\tau)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[h_i^{\xi}(\mathrm{x},t)h_i^{\xi}(\mathrm{y},\tau)+h_i^{\eta}(\mathrm{x},t)h_i^{\eta}(\mathrm{y},\tau)\right] \tag{7.4.159}$$

将式(7.4.143)代入式(7.4.154)可得基于 VG 模型的水头协方差

$$C_h(\mathrm{x},t;\mathrm{y},\tau)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[h_i^{\xi}(\mathrm{x},t)h_i^{\xi}(\mathrm{y},\tau)+h_i^{\eta}(\mathrm{x},t)h_i^{\eta}(\mathrm{y},\tau)+h_i^{\varphi}(\mathrm{x},t)h_i^{\varphi}(\mathrm{y},\tau)\right] \tag{7.4.160}$$

在以上各水头协方差表达式中，令 **y=x**，$\tau=t$ 就可得到相应的水头方差。

（2）含水率的统计矩

含水率不仅反映了土壤的水分状况，也是确定流体实际流速的重要因素，因此其随机分析可应用于非饱和带的溶质运移问题。将含水率随机场展开为级数

$$\theta(\mathrm{x},t)=\theta^{(0)}(\mathrm{x},t)+\theta^{(1)}(\mathrm{x},t)+\theta^{(2)}(\mathrm{x},t) \tag{7.4.161}$$

与水头的统计矩类似，含水率的均值和协方差为

$$\left\langle \theta(\mathrm{x},t)\right\rangle=\theta^{(0)}(\mathrm{x},t)+\left\langle \theta^{(2)}(\mathrm{x},t)\right\rangle \tag{7.4.162}$$

$$C_\theta(\mathrm{x},t;\mathrm{y},\tau)=\left\langle \theta^{(1)}(\mathrm{x},t)\theta^{(1)}(\mathrm{y},\tau)\right\rangle \tag{7.4.163}$$

下面主要推导各参数随机场不相关情况的统计矩，相关情况下的统计矩的推导与之类似，不再赘述。

1）基于 GR 模型的含水率统计矩

由式(7.1.28)可得

$$\begin{aligned}\theta_e(\mathrm{x},t)=(\theta_s-\theta_r)\Big\{&\exp\left[0.5\left(\langle\alpha\rangle+\alpha'\right)\left(h^{(0)}+h^{(1)}+h^{(2)}\right)\right]\times\\&\left[1-0.5\left(\langle\alpha\rangle+\alpha'\right)\left(h^{(0)}+h^{(1)}+h^{(2)}\right)\right]\Big\}^{2/(m_{GR}+2)}\end{aligned} \tag{7.4.164}$$

$\theta_e(\mathbf{x},t)$展开为级数，将各阶分离且合并同类项有

$$\theta^{(0)}(\mathrm{x},t)=(\theta_s-\theta_r)\left[\left(1-0.5\langle\alpha\rangle h^{(0)}\right)\exp\left(0.5\langle\alpha\rangle h^{(0)}\right)\right]^{2/(m+2)} \tag{7.4.165}$$

$$\theta^{(1)}(\mathrm{x},t)=-\frac{\theta^{(0)}}{2(m+2)}\frac{\langle\alpha\rangle h^{(0)}}{1-0.5\langle\alpha\rangle h^{(0)}}\left(\langle\alpha\rangle h^{(1)}+h^{(0)}\alpha'\right) \tag{7.4.166}$$

$$\begin{aligned}\theta^{(2)}(\mathrm{x},t)=&-\frac{\theta^{(0)}}{2(m+2)\left(1-0.5\langle\alpha\rangle h^{(0)}\right)^2}\left\{\langle\alpha\rangle^2 h^{(0)}\left(1-0.5\langle\alpha\rangle h^{(0)}\right)h^{(2)}\right.\\&+0.25\langle\alpha\rangle^2\left(2-\frac{1}{m+2}\langle\alpha\rangle^2 h^{(0)2}\right)h^{(1)2}\\&+\langle\alpha\rangle h^{(0)}\left[2-0.5\langle\alpha\rangle h^{(0)}-\frac{0.5}{m+2}\langle\alpha\rangle^2 h^{(0)2}\right]h^{(1)}\alpha'\\&\left.+h^{(0)2}\left[0.5-\frac{0.25}{m+2}\langle\alpha\rangle^2 h^{(0)2}\right]\alpha'\alpha'\right\}\end{aligned} \tag{7.4.167}$$

系统输入随机场不相关情况下的含水率协方差为

$$C_\theta(\mathrm{x},t;\mathrm{y},\tau)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\theta_i^{\xi}(\mathrm{x},t)\theta_i^{\xi}(\mathrm{y},\tau)+\theta_i^{\eta}(\mathrm{x},t)\theta_i^{\eta}(\mathrm{y},\tau)\right] \tag{7.4.168}$$

式中：

$$\theta_i^{\xi}(\mathrm{x},t)=-\frac{\theta^{(0)}}{2(m+2)}\frac{\langle\alpha\rangle h^{(0)}}{1-0.5\langle\alpha\rangle h^{(0)}}\langle\alpha\rangle h_i^{\xi}$$

$$\theta_i^{\eta}(\mathrm{x},t)=-\frac{\theta^{(0)}}{2(m+2)}\frac{\langle\alpha\rangle h^{(0)}}{1-0.5\langle\alpha\rangle h^{(0)}}\left(\langle\alpha\rangle h_i^{\eta}+h^{(0)}\alpha_i\right)$$

此时的含水率方差为

$$\sigma^2_{\theta(\mathrm{x},t)}=\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\left[\theta_i^{\xi}(\mathrm{x},t)\right]^2+\left[\theta_i^{\eta}(\mathrm{x},t)\right]^2\right\} \tag{7.4.169}$$

2）基于 VG 模型的含水率统计矩

由式(7.1.29)可得

$$\theta_e(\mathrm{x},t)=(\theta_s-\theta_r)\left[1+\left(-e^{\beta}h^{(0)}\right)^n\right]^{-m} \tag{7.4.170}$$

将其展开为泰勒级数

$$\theta^{(0)}(\mathrm{x},t)=(\theta_s-\theta_r)\left[1+\left(-e^{\langle\beta\rangle}h^{(0)}\right)^{\langle n\rangle}\right]^{-m_0} \tag{7.4.171}$$

$$\theta^{(1)}(\mathrm{x},t)=(\theta_s-\theta_r)\left[\frac{\partial S}{\partial\langle h\rangle}h^{(1)}+\frac{\partial S}{\partial\langle\beta\rangle}\beta'+\frac{\partial S}{\partial\langle n\rangle}n'\right] \tag{7.4.172}$$

$$\theta^{(2)}(\mathrm{x},t)=(\theta_s-\theta_r)\left[\frac{\partial S}{\partial\langle h\rangle}h^{(2)}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial\langle h\rangle^2}\left(h^{(1)}\right)^2+\frac{\partial^2 S}{\partial\langle h\rangle\partial\langle\beta\rangle}h^{(1)}\beta'\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 S}{\partial\langle h\rangle\partial\langle n\rangle}h^{(1)}n'+\frac{\partial^2 S}{\partial\langle\beta\rangle\partial\langle n\rangle}\beta'n'+\frac{\partial^2 S}{\partial\langle\beta\rangle^2}(\beta')^2+\frac{\partial^2 S}{\partial\langle n\rangle^2}(n')^2\right] \tag{7.4.173}$$

系统输入随机场不相关情况下的含水率协方差为

$$C_\theta(\mathrm{x},t;\mathrm{y},\tau)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\theta_i^\xi(\mathrm{x},t)\theta_i^\xi(\mathrm{y},\tau)+\theta_i^\eta(\mathrm{x},t)\theta_i^\eta(\mathrm{y},\tau)+\theta_i^\varphi(\mathrm{x},t)\theta_i^\varphi(\mathrm{y},\tau)\right] \tag{7.4.174}$$

式中：

$$\theta_i^\xi(\mathrm{x},t)=(\theta_s-\theta_r)\frac{\partial S}{\partial\langle h\rangle}h_i^\xi$$

$$\theta_i^\eta(\mathrm{x},t)=(\theta_s-\theta_r)\frac{\partial S}{\partial\langle h\rangle}h_i^\eta+\frac{\partial S}{\partial\langle\beta\rangle}\beta_i$$

$$\theta_i^\varphi(\mathrm{x},t)=(\theta_s-\theta_r)\left[\frac{\partial S}{\partial\langle h\rangle}h_i^\varphi+\frac{\partial S}{\partial\langle n\rangle}n_i\right]$$

相应的含水率的方差为

$$\sigma^2_{\theta(\mathrm{x},t)}=\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\left[\theta_i^\xi(\mathrm{x},t)\right]^2+\left[\theta_i^\eta(\mathrm{x},t)\right]^2+\left[\theta_i^\varphi(\mathrm{x},t)\right]^2\right\} \tag{7.4.175}$$

（3）流速的统计矩

达西流速为矢量，下面以分量形式推导其统计矩。由非饱和流达西定律可得

$$q_i(\mathrm{x},t)=-e^{Y^{(0)}}\left(ep^{(0)}+ep^{(1)}+ep^{(2)}\right)\left[\frac{\partial\left(h^{(0)}+h^{(1)}+h^{(2)}\right)}{\partial x_i}+\delta_{i1}\right] \tag{7.4.176}$$

将其展开为级数

$$q_i^{(0)}(\mathrm{x},t)=-e^{Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}\left[\frac{\partial h^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial x_i}+\delta_{i1}\right] \tag{7.4.177}$$

$$q_i^{(1)}(\mathrm{x},t)=-e^{Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}\left\{\frac{\partial h^{(1)}(\mathrm{x},t)}{\partial x_i}+ep^{(1)}(\mathrm{x},t)\left[\frac{\partial h^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial x_i}+\delta_{i1}\right]\right\} \tag{7.4.178}$$

$$q_i^{(2)}(\mathrm{x},t)=-e^{Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}\left\{\frac{\partial h^{(2)}(\mathrm{x},t)}{\partial x_i}+ep^{(1)}(\mathrm{x},t)\frac{\partial h^{(1)}(\mathrm{x},t)}{\partial x_i}\right.$$
$$\left.+ep^{(2)}(\mathrm{x},t)\left[\frac{\partial h^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial x_i}+\delta_{i1}\right]\right\} \tag{7.4.179}$$

流速的均值和协方差分别为

$$\left\langle q_i(\mathrm{x},t)\right\rangle = q_i^{(0)}(\mathrm{x},t) + \left\langle q_i^{(2)}(\mathrm{x},t)\right\rangle \tag{7.4.180}$$

$$\begin{aligned}
C_{qi}(\mathrm{x},t;\mathrm{y},\tau) &= \left\langle q_i^{(1)}(\mathrm{x},t) q_i^{(1)}(\mathrm{y},\tau)\right\rangle \\
&= e^{2Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}\left\langle \frac{\partial h^{(1)}(\mathrm{x},t)}{\partial x_i}\frac{\partial h^{(1)}(\mathrm{y},\tau)}{\partial x_i}\right\rangle \\
&\quad + e^{2Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}\left\langle \frac{\partial h^{(1)}(\mathrm{x},t)}{\partial z} ep^{(1)}(\mathrm{y},\tau)\right\rangle \left[\frac{\partial h^{(0)}(\mathrm{y},\tau)}{\partial z} + \delta_{i1}\right] \\
&\quad + e^{2Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}\left\langle ep^{(1)}(\mathrm{x},t)\frac{\partial h^{(1)}(\mathrm{y},\tau)}{\partial z}\right\rangle \left[\frac{\partial h^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial z} + \delta_{i1}\right] \\
&\quad + e^{2Y^{(0)}(\mathrm{x},t)}\left\langle ep^{(1)}(\mathrm{x},t) ep^{(1)}(\mathrm{y},\tau)\right\rangle \left[\frac{\partial h^{(0)}(\mathrm{x},t)}{\partial x_i} + \delta_{i1}\right]\left[\frac{\partial h^{(0)}(\mathrm{y},\tau)}{\partial x_i} + \delta_{i1}\right]
\end{aligned} \tag{7.4.181}$$

（五） 非饱和流随机分析

根据以上得到的非饱和水分运动的随机模型，我们分析几个饱和-非饱和土体中水分的运动问题。假设非饱和水力传导度满足对数正态分布（f=ln$K$ 满足正态分布），空隙大小分布参数 α 服从正态分布，正态随机函数的满足二阶平稳，其相关函数可用指数形式表示[式(7.1.27）]，在此条件下，特征值和特征向量可由式（7.4.5）得到。图 7.11 表示特征值的递减特征，随着 KL 展开中展开项数的增加，特征值将迅速减小，这种衰减速率与随机函数的相关长度和研究区域的大小有关。相关尺度越大，特征值的衰减速率越快，这时，得到同样的精度时，KL 展开的项数也越小。在以下的算例中，相关尺度为 30~50cm，得到与基于一阶动量分析模型相适应的精度，在 KL 展开中一般仅取 10~80 项即可。图 7.12 是得到的特征函数结果，由图可以看到，随着 KL 展开项数的增大，随机函数高频项增多，但是由于相应特征值的快速衰减，这种高频项对于 KL 展开的贡献越小。

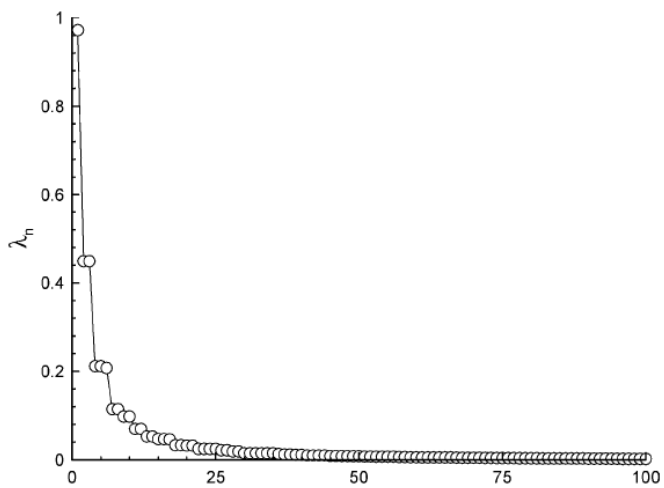


图 7.11 特征值(相关尺度为 50cm，研究尺度为 150cm)

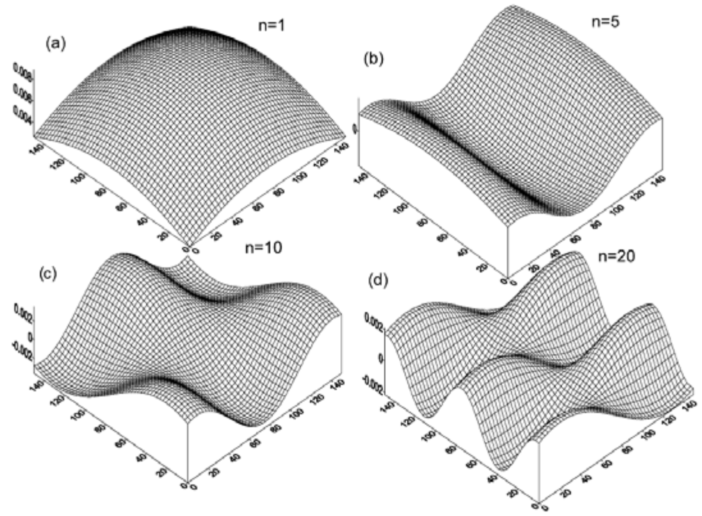


图 7.12　第 1，5，10，20 展开项的特征函数，相关尺度为 50cm，研究尺度为 150cm

取研究区域水平方向1.2m，垂直方向3.6m，划分为21×61个节点，在地表处为常流量入渗，地步边界水头压力位*h*=0，两侧为隔水边界。各统计参数的输入值为$\langle f \rangle = 0$，$\sigma_f^2 = 0.1$，α=0.03cm^{-1}，$\sigma_a^2 = 2.5\times10^{-5} cm^{-2}$，　$\theta_s = 0.3$，　$\theta_r = 0.0$。图7.13为KL展开中展开项数为40、80和150项时的水头均值和方差的模拟结果，同时图中也给出了利用动量分析法得到的模拟结果（(Zhang and Lu，2002）。当KL展开的项数为80时，得到的水头和方差的结果与动量分析结果基本相同，但是基于KL分解的随机分析方法计算工作量明显减少，在本例中基于KL的随机分析方法仅为通量分析方法计算工作量的1/15，对于研究尺度较大的非饱和水分随机模拟问题，这种计算工作量的优势将更为明显。因此，基于KL分解的随机模拟方法为在实际问题研究中的应用提供了一种具有前途的方法。

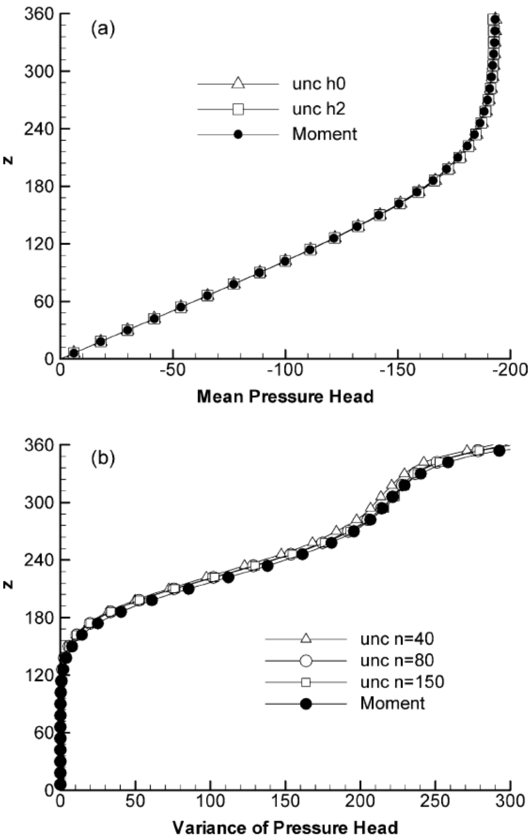


图 7.13　不同 KL 展开次数的水头均值和方差及其与动量分析方法的比较

利用本节得到的非饱和渗流的随机模型，分析非均匀土壤中地下管灌问题。研究区域为 150×150cm，地下水灌水管埋放在地表以下 50cm，地下水管灌的灌水速率为 0.1cm/T，研究区域的底部为固定的地下水面，水头压力为 0，土壤的统计参数为：$\sigma_f^2 = 2.0, \quad \langle \alpha \rangle = 0.04cm^{-1}, \quad \sigma_\alpha^2 = 2.0\times10^{-4}cm^{-2}, \quad \eta_f = \eta_\alpha = 50cm, \quad \theta_s = 0.3, \quad \theta_r = 0$ 。图 7.14 给出研究区域土壤含水量和土壤压力水头的均值和方差。在地下灌溉的过程中，在暗管附近的土壤压力水头和土壤含水量较高，而在灌水管附近水头标准差较大，含水量的标准差较小。含水量小标准差较大的部位分布在土壤含水量中等的部位（图 7.14 中灌水管的两侧），从一般概念上理解，方差的这种分布是合理的，土壤含水量很大或土壤含水量很小时，含水量的误差较小，因此土壤含水量方差较大的应是土壤含水量居中的区域。

图 7.15 表示土壤导水性的层状分布对于土壤水分压力和土壤含水量的影响。在该算例中，灌水管的下部分布一层弱渗透性的土层，由于该层的阻水作用，这时，土壤水压力水头的标准差最大值出现在弱透水层的上部（图 7.15c），而对于无弱透水层的土壤，标准差最大值出现在灌水管的附近（图 7.14c）。当灌水管下部分布有弱透水层时，土壤含水量高的区域沿弱透水层上部水平方向运动（图 7.15b），并且土壤含水量方差较小；在无弱透水层时，土壤水分沿灌水管向下的运动较为强烈。

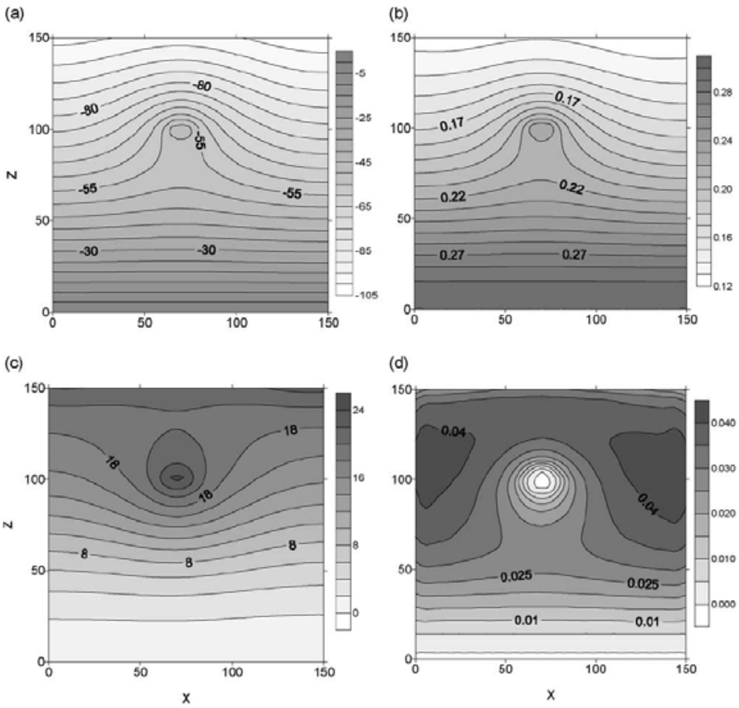


图 7.14 土壤压力水头的均值（a）和均方差（c）及土壤含水量的均值（b）和均方差（d）

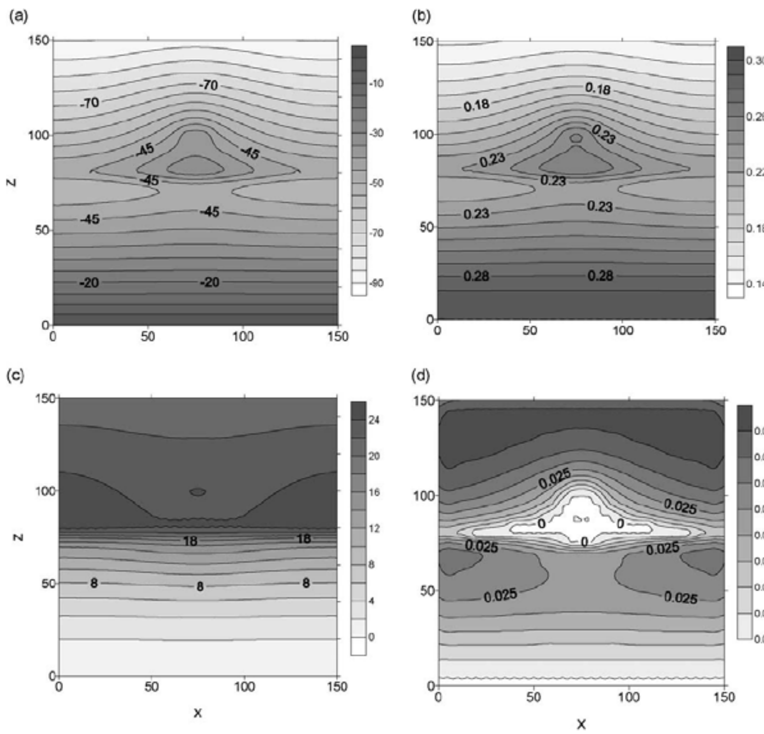


图 7.15 土壤压力水头的均值（a）和均方差（c）及土壤含水量的均值（b）和均方差（d）

第五节　时间序列分析模型

上节主要讨论了含水介质等为随机场的条件下，通过随机分析的方法得到水头、流速或土壤含水量的随机分布。根据上述方法，为了得到研究问题的随机解，首先需要确定所研究问题的随机输入（即输入含水介质等随机场的统计特征），然后利用随机数值方法求解。由第一节的分析可知，含水介质随机场的的分布一般较难得到，实际的观测资料多为在空间某些观测点上所测量的水头（或流量、浓度、含水量等）在不同测量时间的值。观测结果受降雨入渗、潜水蒸发、土壤特性、灌溉排水等随机因素的影响，所得到的水头序列为随机序列，其中包含了所有的随机信息。可以通过对此随机序列的分析得到水头（或流量、浓度、含水量等）随时间的变化特征，进而对水头的变化进行预测。

一、　时间序列与时间序列分析

对任一确定的随机试验，可以用一确定的数值或向量值来描述本次随机试验的结果。在许多具体问题中，随机试验的结果是依赖于某个参数的函数。如测量某段期间观测水井的地下水位 $H(t)$，对每一次测量，地下水位是时间的函数，在任一确定时刻 t，地下水位值为一随机变量。又如在湍流大气中一指定点的风速 $\boldsymbol{U}(t)$，具有三个分量 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{x}}(t)$, $\boldsymbol{U}_{\mathrm{Y}}(t)$, $\boldsymbol{U}_{\mathrm{Z}}(t)$，对每一个分量都是以时间为参数的随机变量，每一次具体随机试验的实验结果为一个确定的时间函数，通常把这样的函数称为样本函数。对于所有可能的试验结果，便得到一组时间函数 $\{\boldsymbol{U}(t), t\in \mathrm{T}\}$，称之为随机过程。对于参数的任一固定取值 t_0，随机过程 $\boldsymbol{U}(t_0)$便是一个随机变量。

当 T 取为整数时，即 $T=\{0,1,2,\cdots\}$ 或 $T=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，则称随机过程 $\{\boldsymbol{U}(t), t\in \mathrm{T}\}$ 为随机序列或时间序列，时间序列常记为 $\{\boldsymbol{U}(n), n\geqslant 0\}$ 或 $\{\boldsymbol{U}(n), n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 或简记为 $\{\boldsymbol{U}_t\}$。这样，n 维随机向量 $\{U_1,U_2,\cdots,U_{\mathrm{n}}\}$ 也可看作随机过程 $\{\boldsymbol{U}(t),\ t=1,2,\cdots,\ n\}$。。在实际应用中所得到的随机过程 $X(t)$在某时段 $[t_1,\ t_2]$ 之间的一个实现多为在有限个离散时间的随机序列，即时间序列 $\{X_t\}$，$t=1,2,3,\cdots,N$，其中 $X_t=X(t)$。

随机过程是一族随时间而变化的随机变量，对应不同时间的随机变量之间存在相互的统计联系，因此，可以利用对不同时间的随机变量之间的统计关系，由已经观测到的随机变量所取值的大小估计或预报随机变量在未来时刻的取值为了掌握时间序列的变化规律，可应用参数化模型，根据时间序列的观测值 X_i 构造出一个带有参数的数学模型，将时间序列大量数据中所蕴含的信息浓缩在有限个模型参数之中，为预报和控制提供依据。其中一类最为常用的模型为线性动态模型，或称为线性模型。

设 $\{X_t\}$ 为零均值平稳时间序列，P 阶自回归 q 阶滑动平均混合模型定义为

$$X_t-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i X_{t,i}=\alpha_t-\sum_{i=1}^{q}\theta_i\alpha_{t,i} \tag{7.5.1}$$

其中 $\{\alpha_t\}$ 为零均值白噪声序列，它满足

$\langle\alpha_t\rangle=0$; $\langle\alpha_s\alpha_t\rangle=\sigma_\alpha^{2}$, $s=t$；$\langle\alpha_s\alpha_t\rangle=0$，$s\neq t$；$\langle\alpha_s\alpha_t\rangle=0$，$s>t$ ；$\alpha_t\sim \mathrm{N}(0,\sigma_\alpha)$，$\varphi_i,\theta_i$ 分别为自回归系数和滑动平均系数，引用后移算子 B

$B^{\mathrm{j}}X_t=X_{t\text{-}\mathrm{j}}$　　　$(j=0,1,2,\cdots)$

则(7.5.1)式可以简写为

$$\varphi(B)X_t=\theta(B)\alpha_t \tag{7.5.1b}$$

式中：

$$\varphi(B)=1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i B^i$$

$$\theta(B)=1-\sum_{i=1}^{q}\theta_i B^i$$

模型(7.5.1)记为 ARMA(p,q)，表示了时间序列｛X_t｝和白噪声序列｛α_t｝的线性组合。当 p=0 时，记 MA(q)=ARMA(0,q)，称为 q 阶滑动平均模型，当 q=0 时，记 AR(p)=ARMA(p,0)，称为 p 阶回归模型。

根据时间序列的一个实现｛X_i｝，可确定模型类型和模型阶数(p,q)。并在此基础上估计模型参数φ_i, θ_i。对于所给的时间序列样本数据｛X_i｝所拟合的模型参数和阶数，都是相应参数真值的估计值，尚需进一步对所建立模型的接受程度进行检验。

在建立线性模型后，可根据模型对其未来时刻可能出现的情况或状态作出预报或预测。所谓 L(L≥1)步预报，就是根据现在时刻 t 和已往各时刻的观测值 x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, …的历史资料，对未来时刻 $t+L$ 的随机变量 X_{t+L} 作出估计，这个估计值就是预报值, 记为 $\hat{X}_t(L)$。预报结果的优劣程度，应有一个衡量标准，所谓平稳线性最小方差意义下的预报系指使预报误差 $X_{t+L}-\hat{X}_t(L)$ 的方差达到最小，即将 $\hat{X}_t(L)$ 表示为

$$\hat{X}_t(L)=C_0X_t+C_1X_{t-1}+C_2X_{t-2}+\cdots$$

使
$$\left\langle\left(X_{t+L}-\hat{X}_t(L)\right)^2\right\rangle=\min \text{（最小）}$$

对于 AR(p)序列有预报公式

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{x}_t(1)=\varphi_1x_t+\varphi_2x_{t-1}+\cdots+\varphi_rx_{t-p+1}\\
&\hat{x}_t(2)=\varphi_1\hat{x}_t(1)+\varphi_2x_t+\cdots+\varphi_rx_{t-p+2}\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
&\hat{x}_t(p)=\varphi_1\hat{x}_t(p-1)+\varphi_2\hat{x}_t(p-2)+\cdots+\varphi_px_t\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
&\hat{x}_t(L)=\varphi_1\hat{x}_t(L-1)+\varphi_2\hat{x}_t(L-2)+\cdots+\varphi_p\hat{x}_t(L-p)
\end{aligned}\right\} \tag{7.5.2}$$

由此可见，对于 AR(p)序列，只需要知道 x_t, x_{t-1}, ⋯, x_{t-p+1} 这 p 个时刻的观测值，无须知道更多的历史资料，即可根据(7.5.2)式对未来任意时刻 $t+L$ 随机变量 x_{t+L} 作出平稳最小方差预测。预报误差将随预测步数的增加而增大(李先孝，1991)。MA(q)和 ARMA(p,q)序列的预报方法可参考有关专著(项静恬等，1991，安鸿志，1992，杨金忠与蔡树英，1993)。

地下水盐动态预测可利用时间序列的预报方法，但其变化过程有其特殊性，主要表现在：(1)

地下水运动过程在某种程度上是确定的，它的随机性主要表现在介质参数和均衡要素的随机性。(2)影响地下水盐未来变化的因素（如未来年份的降雨过程、地下水开采过程、地表水灌溉引水过程等）是随机的，事先很难给出其定量描述。 (3)由于影响地下水盐变化的各种人为因素和自然因素错综复杂，并具有明显的周期变化特征，使得地下水盐的周期变化相当复杂，故对周期的识别难度较大。 (4)已有的观测资料受各种人为因素的影响较大，而这些人为因素对地下水盐变化的影响很难预测和描述。由此也增大了用历史地下水、盐观测序列研究未来水、盐变化的难度。

不同地区不同时期的历史数据蕴含着不同的信息特点，表现出各自特有的分布特性，故对不同数据需要采用不同的建模方法才能得出更为可靠的预测结果。以下给出几种对区域地下水位、土壤盐分预报较为实用的时间序列分析模型。

二、 时间序列分析组合模型

一般来说，地下水位在一定时期内具有一定趋势性，在长序列中呈现出明显的年周期性变化，影响地下水位变化因素的复杂性也会对地下水位产生明显的干扰影响。针对这些特点，可建立如下的区域地下水位预报组合模型。

设$\{\boldsymbol{H}_t\}$ 是通过对于观测数据的分析而选出的有代表性的时间序列，样本长度为 N，即 $t=1,2,...,N$，以月为观测时间单位，该序列可用以下组合模型表示

$$H_t = Y_t + P_t + X_t \tag{7.5.3}$$

$$Y_t = \sum_{j=1}^{II} \alpha_j t^{j-1} \tag{7.5.4}$$

$$P_t = a_0 + \sum_{l=1}^{r} \left[a_l \cos \frac{2\pi\, t}{T_l} + b_l \sin \frac{2\pi\, t}{T_l} \right] \tag{7.5.5}$$

$$\Phi(\mathrm{B})\, \boldsymbol{x}_{\mathrm{t}} = \Theta(\mathrm{B})\, \varepsilon_{\mathrm{t}} \tag{7.5.6}$$

式中：$\{Y_t\}$为确定性幂函数趋势项，$\{P_t\}$为确定性周期项，$\{X_t\}$为残差随机序列。

首先由$\{H_t\}$确定幂函数趋势 Y_t 的阶数 II 和回归系数α_j，$j=1, 2, \dots, \mathrm{II}$。相应的最小二乘格式为

$$H_t = \sum_{j=1}^{II} a_j t^{j-1} + e_t \quad , \qquad t = 1, 2, \cdots, N \tag{7.5.7}$$

其中e_t为拟合误差。

式(7.5.7)可改写为

$$H_t = \Phi^T(t)\alpha + e_t \tag{7.5.8}$$

式中：$\Phi(t)=(1, t, t^2, t^3, ..., t^{II-1})^{\mathrm{T}}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{II})^{\mathrm{T}}$，$\alpha$可由下列方程组决定

$$G(N)^T G(N)\alpha = G(N)^T Z(N) \tag{7.5.9}$$

其中：
$$G(N)=\begin{pmatrix}\Phi(1)^{\mathrm{T}}\\ \Phi(2)^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \Phi(N)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},\quad Z(N)=\begin{pmatrix}H_1\\ H_2\\ \vdots\\ H_N\end{pmatrix}$$

对于给定的多项式拟合阶数 II，可求得残差为

$$R(II)=\sum_{t=1}^{N}(H_t-\boldsymbol{\Phi}(t)^{\mathrm{T}}\alpha)^2$$

在给定的最高拟合阶数范围内（一般取 3～5 阶即可），使 $R(II)$达到最小的值为所取拟合幂函数趋势的阶数。

在原时间序列$\{H_t\}$中减去所确定的幂函数趋势项$Y_t=\Phi(t)^{\mathrm{T}}a=\sum_{j=1}^{II}a_j t^{j-1}$，得到新的残差序列$\{\xi_t\}$。

$$\xi_t=H_t-Y_t=H_t-\sum_{j=1}^{II}a_j t^{j-1},\quad t=1,2,\cdots,N \tag{7.5.10}$$

用周期图方法识别序列$\{\xi_t\}$的隐含周期 T_l , l=1, 2 , ... , r, 代入(7.5.3)式，则$\{\xi_t\}$可表示为：

$$\xi_t==a_0+\sum_{l=1}^{r}\left[a_l\cos\frac{2\pi t}{T_l}+b_l\sin\frac{2\pi t}{T_l}\right]+e_t \tag{7.5.11}$$

将上式写为最小二乘格式为

$$\xi_t=\Phi(t)^{\mathrm{T}}\beta+e_t \tag{7.5.12}$$

其中：

$$\Phi(t)=\left(1,\cos\frac{2\pi t}{T_1},\sin\frac{2\pi t}{T_1},\cos\frac{2\pi t}{T_2},\sin\frac{2\pi t}{T_2},\cdots,\cos\frac{2\pi t}{T_r},\sin\frac{2\pi t}{T_r}\right)^{\mathrm{T}} \tag{7.5.13}$$

$$\beta=(a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,...,a_l,b_l)^{\mathrm{T}} \tag{7.5.14}$$

类似于(7.5.8)式，可以得到最小二乘方程

$$G(N)^{\mathrm{T}}G(N)B=G(N)^{\mathrm{T}}Z(N) \tag{7.5.15}$$

其中：

$$G(N)=\begin{pmatrix}\Phi(1)^{\mathrm{T}}\\ \Phi(2)^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \Phi(N)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},Z(N)=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_N\end{pmatrix}$$

$\Phi(t)$ 由(7.5.13)式表示。

利用(7.5.15)式求得参数$\beta=(a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,...,a_r,b_r)^{\mathrm{T}}$后，代入(7.5.5)式可求得周期项 P_t 。

对于地下水位序列，根据问题的物理背景和数据分析，有时可以确定出周期长度。这时，可直接利用(7.5.15)式求得参数β。

在序列$\{\xi_t\}$中减去周期分量P_t，则可得到最后的残差时间序列$\{X_t\}$

$$X_t = \xi_t - P_t = H_t - Y_t - P_t \tag{7.5.16}$$

假定残差序列$\{\boldsymbol{x}_t\}$满足乘积季节性模型

$$\phi(B)U\left(B^S\right)\nabla^d \nabla_S^D X_t = \Theta(B)V\left(B^S\right)\varepsilon_t \tag{7.5.17}$$

其中：

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

$$U\left(B^S\right) = 1 - u_1 B^S - u_2 B^{2S} - \cdots - u_P B^{PS}$$

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$$

$$V\left(B^S\right) = 1 - v_1 B^S - v_2 B^{2S} - \cdots - v_Q B^{QS}$$

(7.5.17)式可简记为$(p, d, q)*(P, D, Q)_S$。乘积季节性模型可视为ARMA序列的一般形式结构，将(7.5.17)式展开，有

$$\phi^*(B)W_t = \Theta^*(B)\varepsilon_t \tag{7.5.18}$$

其中：

$$\begin{aligned} \phi^*(B) &= \phi(B)U(B^s) \\ \Theta^*(B) &= \Theta(B)U(B^s) \\ W_t &= \nabla^d \nabla_s^D X_t \end{aligned}$$

由(7.5.18)式所表达的ARMA模型为疏系数ARMA模型。当(7.5.17)式中P，Q，D都为零时，则其退化为ARIMA模型。

对于乘积季节性模型阶数识别及参数估计，可通过考查随机序列的样本自相关函数、偏相关函数的方法，由问题的物理背景确定其周期S。如果序列的样本自相关函数、偏相关函数既不拖尾，也不截尾，不存在衰减趋势，而在周期S倍数的点上，自相关函数或偏相关函数出现绝对值相当大的峰值或具有振荡变化，则判断序列为乘积季节性模型。可选定差分或差分季节的最高阶数（一般差分阶数满足$0 \le d \le 4$，季节差分阶数$0 \le D \le 2$)，对原时间序列$\{\boldsymbol{x}_t\}$进行差分运算，得到$W_t = \nabla^d \nabla_S^D X_t$。记$\sigma_W(d,D)$为序列$\{W_t\}$的均方差，在$d$、$D$的变化范围内，使$\sigma_W$达最小的阶数即为最优阶数。

乘积季节性模型的特点是模型阶数比较高，但是自由参数的个数不多。若采用优化方法只对自由参数在模型稳定可逆域识别最优参数，会使计算工作量大幅度减小。powell优化方法是实现上述目的的较好方法之一，该方法建模精度较高，但是计算速度较慢。

对于时间序列$\{x_t\}$的另一建模途径是采用P-W建模方法，因为P-W方法建模过程的自动化能力较强，可充分利用计算机能力对于模型的阶数进行识别和判断。

用powell方法或P-W方法确定出随机序列$\{x_t\}$的模型后，可将所得到的模型表示成ARMA(p^*,q^*)的形式，采用逆函数方法进行L步预报。当d，D不为零时，需要进行反季节差分得

到预报结果$\left\{\hat{X}_t\right\}_{N+1}^{N+L}$。对于所建立的幂函数趋势模型(7.5.4) 式和周期模型(7.5.5) 式分别进行向前 L 步预报，得到$\left\{\hat{Y}_t\right\}_{N+1}^{N+L}$，$\left\{\hat{P}_t\right\}_{N+1}^{N+L}$，将以上预报结果分别代入(7.5.3) 式后即为 H_t 的向前 L 步预报结果$\left\{\hat{H}_t\right\}_{N+1}^{N+L}$

$$\hat{H}_t=\hat{Y}_t+\hat{P}_t+\hat{X}_t,\quad t=N+1,N+2,\cdots,N+L \tag{7.5.19}$$

三、 多层递阶模型

时间序列方法的特点是将蕴含在时间序列中的信息浓缩在少量参数中。若模型参数为最优模型条件下的一组平均最优参数，则称为定常数或非时变参数，相应系统为非时变的动态系统；若模型参数随时间而变化则称为时变参数，相应的系统为时变动态系统。

利用 ARMA(或 AR)模型所确定的参数只是一组平均最优参数，无法追踪系统参数的变化，如果按这组参数进行远期预报，结果只能是依时间序列的均值特征对系统的远期发展作出估计，不适合对时变动态系统进行预报。多层递阶模型是针对时变动态系统的一种模型，其基本思想是把动态系统的状态预报分为两部分，即对系统的时变参数的预报和在此基础上对系统状态的预报(韩志刚，1989)。这种方法对原时间序列模型中的参数经过适当处理，又形成一个新的序列，相对于原序列而言，称这些参数形成的时序为第二层时序，同理还可以形成第三层、第四层时序，故称为多层递阶预报方法(蔡季冰，1989)。

地下水系统是时变的动态系统，系统环境中各种因素均是随时间变化的量，它们之间彼此影响，互相制约，形成了错综复杂的综合体。地下水位观测序列$\left\{H(t)\right\}_1^N$ 是地下水位系统的运转结果，可视为地下水系统的动态输出，而降雨、灌溉等因素可视为系统的动态输入。

若未来时刻的输出可以用过去的输入和输出线性表示时，该系统称为线性系统。

对于随机动态系统，通过对随机噪声的“参数化随机补偿”(韩志刚，1989)，可得到等价线性系统。

（一） 时变参数的识别

将区域地下水系统表示为单输入、单输出的线性时变系统，为

$$H(k)=\phi^{\mathrm{T}}(k)\theta(k)+v(k),\quad k=1, 2, ..., \mathrm{N} \tag{7.5.20}$$

式中，$H(k)$是系统输出(地下水位)；$\phi(k)$是观测到的系统输出(地下水位)和系统输入$\left\{u(t)\right\}_1^N$(如降雨量、用水量等)构成的向量

$$\phi(k)=\{H(k\text{-}1), H(k\text{-}2), ... ,H(k\text{-}N_a), u(k), u(k\text{-}1), u(k\text{-}N_b)\}^{\mathrm{T}} \tag{7.5.21}$$

当 $N_b=-1$ 时，为无输入系统；N_a，N_b 分别为模型输出、输入部分的阶数；$v_k=v(k)$为系统随机干扰；$\theta(k)$为未知随机时变参数向量

$$\theta(\boldsymbol{k})=\left\{\theta_1(\boldsymbol{k}),\theta_2(\boldsymbol{k}),\cdots,\theta_{\boldsymbol{N_a}+\boldsymbol{N_{b+1}}}(\boldsymbol{k})\right\}^{\mathrm{T}} \tag{7.5.22}$$

按以下公式对线性时变系统中时变参数进行跟踪计算（韩志刚，1989）

$$\hat{\theta}(\boldsymbol{k})=\hat{\theta}(\boldsymbol{k}-1)+\frac{\delta}{\|\varphi(\boldsymbol{k})\|^2}\varphi(\boldsymbol{k})\left\{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k})-\varphi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k})\hat{\theta}(\boldsymbol{k}-1)\right\} \tag{7.5.23}$$

其中：$k=N_{ab},N_{ab+1},\ldots,N;\ N_{ab}=\max(N_a,N_b)+1;\ |\varphi(k)|^2=\varphi(k)^{\mathrm{T}}\varphi(k)$; δ为适当的常数，它的取值与相应的后验残差（拟合残差）

$$\varepsilon\left(\boldsymbol{k},\hat{\theta}(\boldsymbol{k}),\delta\right)=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k})-\phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k})\hat{\theta}(\boldsymbol{k}) \tag{7.5.24}$$

有关，当$\delta=1$ 时，(7.5.23)式成为

$$\hat{\theta}(\boldsymbol{k})=\hat{\theta}(\boldsymbol{k}-1)+\frac{1}{\|\varphi(\boldsymbol{k})\|^2}\varphi(\boldsymbol{k})\left\{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k})-\varphi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k})\hat{\theta}(\boldsymbol{k}-1)\right\} \tag{7.5.25}$$

这时有

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k})-\phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k})\hat{\theta}(\boldsymbol{k})=0 \tag{7.5.26}$$

即后验残差等于零。这说明由跟踪公式确定的$\hat{\theta}(k)$能够反映出系统的瞬变特征。但是不难看出，对于初值$\hat{\theta}(0)$的取值不同，由式(7.5.25)确定的$\hat{\theta}(k)$都能满足后验残差等于零。这说明所求的参数不唯一。为了解决这个参数识别的非唯一性问题，罗新红等(1986)提出一种称为“学习过程”的参数初值识别方法。郑宇宏、韩光文(1989)对这种方法进行了理论分析，并称为循环方法。该方法的基本步骤为：首先给定一个参数初值，根据已知输出序列$\left\{H(k)\right\}_1^N$和输入序列$\left\{u(k)\right\}_1^N$，应用(7.5.25)式可求得参数向量序列$\left\{\hat{\theta}^1(k)\right\}_{N_{ab}}^N$，然后将$\left\{H(k)\right\}_1^N$和$\left\{u(k)\right\}_1^N$顺序颠倒，对颠倒后的序列$\left\{H(k)\right\}_N^1$、$\left\{u(k)\right\}_N^1$和求得的$\hat{\theta}^1(N)$，再应用(7.5.25)式求得参数序列$\left\{\hat{\theta}^2(k)\right\}_N^{N_{ab}}$，重复以上过程，直到相邻两次推得的参数向量序列满足

$$\max_k\left|\hat{\theta}(k)-\hat{\theta}^*(k)\right|<\varepsilon_0$$

取向前递推求得的参数作为最优参数的估计值。其中ε_0是预先给定的很小的数。

（二） 时变参数和系统输出的预报模型

当通过参数追踪求得了最优参数估计值$\left\{\hat{\theta}(k)\right\}_1^N$以后，下一步则需针对此估计值建立相应的模型。由(7.5.21)式可以看出，最优参数估计值也是N_a+N_b+1 维时间序列，若各分量间各自变化规律比较明显时，可以按各分量进行处理。一般来说，按分量处理的方法要比统一处理方法简单。对于$\left\{\hat{\theta}(k)\right\}_1^N$的第 i 个分量$\left\{\hat{\theta}_i(k)\right\}_1^N$，首先检验其平稳性，若平稳，则可建立 ARMA($p$, q)模型，并按 P-W 方法进行 L 步预报，得到$\hat{\theta}_i(k+1),\hat{\theta}_i(k+2),\cdots,\hat{\theta}_i(k+L)$；若不平稳，则可通过趋势识别和周期识别方法，判别和提取各种趋势项，再对平稳残差序列建模。为此，可建立下述组合模型

$$\hat{\theta}_i(k)=Y_i(k)+P_i(k)+X_i(k),\quad i=1,2,\cdots,N_a+N_b+1 \tag{7.5.27}$$

$$Y_i(k)=\sum_{L=0}^{s^{(i)}}\alpha_{iL}k^L \tag{7.5.28}$$

$$P_i(k)=a_{i0}+\sum_{L=1}^{r(i)}\left[a_{iL}\cos\frac{2\pi k}{T_L^{(i)}}+b_{iL}\sin\frac{2\pi k}{T_L^{(i)}}\right] \tag{7.5.29}$$

$$X_{i,k}+\varphi_{i,1}X_{i,k-1}+\varphi_{i,2}X_{i,k-2}+\cdots+\varphi_{i,m}X_{i,k-m}=\varepsilon_i \tag{7.5.30}$$

式中，$Y_i(k)$为幂函数趋势，$P_i(k)$为周期项，$T_L^{(i)}$为周期，$s^{(i)}$, $r^{(i)}$, $\boldsymbol{\alpha}_{iL}$, a_{i0}, a_{iL}, b_{iL}为待定参数，$X_i(k)$为参数序列减去幂函数趋势和周期趋势后的残差序列。

幂函数趋势的确定采用逐步多项式回归方法。周期分量 $P_i(k)$按以下步骤确定：首先对$\left\{\hat{\theta}_i(k)-Y_i(k)\right\}$序列用方差分析方法或周期图方法在一定检验准则条件下识别其隐含周期 $T_L^{(i)}$, L=1, 2, ...,$r^{(i)}$。将 $T_L^{(i)}$代入式(7.5.29)，得到线性矛盾方程，再用最小二乘法确定系数 a_{i0}, a_{iL}, b_{iL}。残差序列用 AR(m)模型(7.5.30)描述，并用最小二乘法识别模型参数，用 FPE 准则进行模型定阶(杨位钦，顾岚，1988)。

对时变参数的各个分量建模后，分别用式(7.5.28)、(7.5.29)、(7.5.30)对时变参数的各项进行 L 步预报，代入式(7.5.27)即得到时变参数的 L 步预测值$\left\{\hat{\theta}^*(k)\right\}_{N+1}^{N+L}$.

若时变参数的各分量经过趋势、周期识别和提取后仍不平稳，则可对其建立广义 AR 模型，继续进行关于序列$\left\{\hat{\theta}(k)\right\}_1^N$的多层分析，直到高一层的序列可以分离出平稳序列为止。

有了时变参数的向前 L 步预报值之后，并已知系统输出的观测序列$\left\{H(k)\right\}_1^N$，系统输入序列

$\left\{u(k)\right\}_1^{N+L}$，以及参数序列的追踪值$\left\{\hat{\theta}(k)\right\}_1^N$，就可以通过下式得到系统输出序列的向前 h 步预报值

$$\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{h})=\varphi^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{h})\hat{\theta}^{*}(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{h}) \tag{7.5.31}$$

其中

$$\varphi^{*}(N+h)=\left\{\hat{H}_{N+h-1},\hat{H}_{N+h-2},\cdots,\hat{H}_{N+1},H_{N},H_{N-1},\cdots,H_{N+h-N_a},u_{N+h},u_{N+h-1},\cdots,u_{N+h-N_b}\right\} \tag{7.5.32}$$

预报时刻的系统输入$\left\{u(k)\right\}_{N+1}^{N+L}$一般也为预报因子，可通过相应的预报方法得到。

四、 考虑序列周期和变幅的组合模型

受灌溉、降雨等因素的影响，地下水位具有年周期变化的规律，且在每一个年周期内水位变化的形态基本类似。但由于不同年份的干旱程度、引水量大小、地下水开发状况及降雨量的差别，各年的平均水位和水位变幅有一定变异性，使得多年地下水位序列的规律性较差，难以识别和预测。于是，设想从地下水位序列中消除均值和变幅的影响，生成新的序列，对新序列提取周期分量，再对均值、变幅和残差序列建立 ARMA 或 AR 模型，最后通过逆过程得出原序列的预报结果。

（一） 非时变参数系统模型

对具有周期性的非平稳地下水位观测序列$\left\{H_t\right\}_1^N$，设其周期为 T，对每一个周期内的均值和变幅分别构成序列$\{AVH_j\}$、$\{AMH_j\}$，j=1 , 2 , ... , [N/T]，有

$$AVH_j=AVH(j)=\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T}H((j-1)*T+k) \tag{7.5.33}$$

$$AMH_j = AMH(j)=H_{max}(j) - H_{min}(j) \tag{7.5.34}$$

$$H_{\max}(j)=\max_{k=1,\cdots,T}H((j-1)*T+k) \tag{7.5.35}$$

$$H_{\min}(j)=\min_{k=1,\cdots,T}H((j-1)*T+k) \tag{7.5.36}$$

式中：$j=j(t)=[(t-1)/T]+1$； $k=k(t)=t-[(t-1)/T]\times T$； [d]表示 d 的整数部分。

由时间序列$\{H_t\}$、$\{AVH_j\}$和$\{AMH_j\}$构造序列$\{HQ_t\}$，t =1, 2, ... , N，即

$$HQ_t=HQ(t)=\frac{H(t)-AVH(j(t))}{AMH(j(t))} \tag{7.5.37}$$

该序列可描述为

$$HQ_t = HAVG_k + x_t \tag{7.5.38}$$

其中

$$HAVG_k = HAVG(k) = \frac{1}{\left[\frac{N}{T}\right]} \sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{T}\right]} HQ((j-1)*T+k) \tag{7.5.39}$$

为周期分量，其反映了$\{HQ_t\}$序列的周期性特征。

$$x_t = x(t) = HQ_t - HAVG[k(t)] \tag{7.5.40}$$

为残差序列。

序列$\{HQ_t\}$的周期特征分量$\{HAVG_k\}$由（7.5.39）式描述，序列$\{AVH_j\}$、$\{AMH_j\}$和$\{x_t\}$可分别用下述 ARMA 模型建模和预报。

$$\phi^{(1)}(\mathrm{B})AVH_j=\Theta^{(1)}(\mathrm{B})\, a_j^{(1)},\quad j = 1, 2, ..., [(N-1)/T]+1 \tag{7.5.41}$$

$$\phi^{(2)}(\mathrm{B})AMH_j=\Theta^{(2)}(\mathrm{B})\, a_j^{(2)},\quad j = 1, 2, ..., [(N-1)/T]+1 \tag{7.5.42}$$

$$\phi^{(3)}(\mathrm{B})x_t=\Theta^{(3)}(\mathrm{B})\, a_t^{(3)},\quad t = 1, 2, ..., N \tag{7.5.43}$$

式中： $\phi^{(1)}(B) = 1 - \sum_{j=1}^{p^{(i)}} \phi_j^{(1)} B^j$, $\Theta^{(1)}(B) = 1 - \sum_{j=1}^{q^{(i)}} Q_j^{(1)} B^j$, $i = 1,2,3$

$p^{(i)}$, $q^{(i)}$ 分别表示三个时间序列的自回归阶数，$a_j^{(i)}$为白噪声，B 为后移算子，在计算过程中，取 $q^{(i)} = 0$，用最小二乘法及 FPE 准则求参和模型定阶。

设由时序模型 ARMA 预报得出的均值、变幅和残差序列分别由$\left\{A\hat{V}H_j\right\},\left\{A\hat{M}H_j\right\},\left\{\hat{x}(t)\right\}$来表示，并设预报步数为 L，经对式（7.5.37）的逆转化，得出原序列$\{H_t\}$的预报结果为

$$\hat{H}_t = \hat{H}(t) = \left(HAVG(k(t)) + \hat{x}(t)\right) * A\hat{M}H_j + A\hat{V}H_j \tag{7.5.44}$$

式中：$t=N+1,N+2,...,N+L;\ j=j(t)=[(t-1)/T]+1;\ k=k(t)=t-[(t-1)/T]*T$。

（二） 时变参数系统模型

前述模型没有考虑分解出的年均值序列和年变幅序列的时变特性，本节提出一种新的模型——多层递阶组合模型，可解决这两个序列的时变问题。

设$\{H_t\}$, $t = 1, 2, ..., N$ 为地下水位埋深序列，N 为样本长度，以月为观测单位。$\{H_t\}$一般为具有年或多年周期的非平稳序列，将其分解为年均埋深序列$\{Y_j\}$、年水位变幅序列$\{A_j\}$、周期序列$\{P_t\}$和零均值平稳序列$\{x_t\}$。当用多层递阶模型描述$\{Y_j\}$和$\{A_j\}$时，地下水位埋深序列$\{H_t\}$可用以下组合模型描述

$$H_t = (P_t + X_t)A_{j(t)} + Y_{j(t)},\quad t = 1, 2, \cdots, N;\ \ j(t) = \left[{(t-1)}/{T}\right] + 1 \tag{7.5.45}$$

$$
\begin{aligned}
&Y_j^{\mathrm{T}} = \phi_Y(j)\theta(j) \\
&\quad \phi_Y(j) = \{Y_{j-1}, Y_{j-2}, \cdots, Y_{j-N}, u_j, u_{j-1}, \cdots, u_{j-Nb}\}^{\mathrm{T}}; \\
&\quad \theta(j) = \{\theta_1(j), \theta_2(j), \cdots, \theta_{Na+Nb+1}(j)\}^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{7.5.46}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_j = \phi_A^{\mathrm{T}}(j)\alpha(j) \\
&\quad \phi_A(j) = \{A_{j-1}, A_{j-2}, \cdots, A_{j-N}, u_j, u_{j-1}, \cdots, u_{j-Nd}\}^{\mathrm{T}}; \\
&\quad \alpha(j) = \{\alpha_1(j), \alpha_2(j), \cdots, \alpha_{Nc+Nd+1}(j)\}^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{7.5.47}
$$

$$
P_t = \sum_{r=1}^{l} P_t^{(r)} \tag{7.5.48}
$$

$$
X_t = \varepsilon_t \left(\Psi(B) \big/ \Phi(B) \right) \tag{7.5.49}
$$

式中：$\{\theta(j)\}$, $\{\alpha(j)\}$分别为模型(7.5.44)、(7.5.47)的时变参数向量序列，N_a，N_b，N_c，N_d 为模型阶数，l 为周期个数。Φ(B)和Ψ(B)分别为自回归和滑动平均系数多项式，T 为周期，ε_t 为白噪声。

对于给定的月水位埋深序列$\{H_t\}$，其年均埋深和变幅可分别表示为

$$
Y_j = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T} H_{(j-1)T+k}, \qquad t = 1, 2, \cdots, \left[N \big/ T \right] \tag{7.5.50}
$$

$$
A_j = H_{\max}(j) - H_{\min}(j) \tag{7.5.51}
$$

$$
H_{\max}(j) = \max_{k=1,\cdots,T} H_{(j-1)T+k}
$$

$$
H_{\min}(j) = \min_{k=1,\cdots,T} H_{(j-1)T+k}
$$

这里，T=12。

对于(7.5.46)、(7.5.47)两式的参数追踪、多层递阶建模和预报如前所述，这里不再重复。

从原水位埋深序列$\{H_t\}$中减去年均值并除以年变幅得到新序列

$$
h_t = \frac{H_t - H_{j(t)}}{A_{j(t)}}
$$

对$\{h_t\}$可根据经验确定其部分周期。除此之外，序列$\{h_t\}$中还可能包含其他周期 $T^{(r)}$。首先将 h_t 按长度 $T^{(r)}$进行分组，得到

$$
h_i = h_{kj} = h_{(j-1)T^{(\mathrm{r})}}, \quad k=1, 2, ..., T^{(r)}; \quad j=1, 2, ..., S^{(r)}, \; S^{(r)}=[N/T^{(r)}]
$$

按此分组得到周期为

$$
P_k^{(r)} = \frac{1}{S^{(r)}} \sum_{j=1}^{S^{(r)}} h_{k,j} = P_t^{(r)} \tag{7.5.52}
$$

$$
k = k(t) = t - \left[\frac{t-1}{T^{(r)}} \right] * T^{(r)}
$$

求出组内及组间误差平方和 S_B , S_W

$$S_B = S^{(r)} \sum_{k=1}^{T^{(r)}} \left(P_k^{(r)} - \bar{h} \right)^2, \quad S_W = \sum_{k=1}^{T^{(r)}} \sum_{j=1}^{S^{(r)}} \left(h_{i,j} - P_k^{(r)} \right)^2, \quad \bar{h} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{S^{(r)}} \sum_{k=1}^{T^{(r)}} h_{k_j}$$

并由此构造统计量 $F = \dfrac{S_B\left(N - T^{(r)}\right)}{S_W\left(T^{(r)} - 1\right)}$ 进行 F 检验，以确定是否可接受 $T^{(r)}$ 为隐含周期，若检验通过，则由式(7.5.52)得到的 $P_{k(t)}^{(r)}$ 为$\{h_t\}$的一个周期分量。从 h_t 中减去周期 $P_{k(t)}^{(r)}$ 后，可继续识别其余隐含周期。最后得到残差序列 $\left\{x_t\right\}_1^N$，其中

$$X_t = h_t - \sum_{r=1}^{l} P_{k(t)}^{(r)} \tag{7.5.53}$$

对残差序列的建模，不失一般性，可取 $l=1$，$N=S^{(r)}T^{(r)}$，则由式(7.5.52),(7.5.53)可知，序列 $\left\{x_t\right\}_1^N$ 满足均值为零，即 $E\left(x_t\right) = \dfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t = \dfrac{1}{S^{(r)}} \sum_{j=1}^{S^{(r)}} \left[\dfrac{1}{T^{(r)}} \sum_{k=1}^{T^{(r)}} \left(h_{k_j} - P_k^{(r)} \right) \right] = 0$，至少可认为$\{x_t\}$为平稳随机序列。这时有：$\Phi(B)\, X_t = \Psi(B)\, \varepsilon_t$，即建立 ARMA 或 AR 模型。

从预报和建模的比较来看，该模型对分析具有明显周期的序列较其他类型的模型具有较大的优势，表现在：① 该模型将时间序列依其变化特点划分为多个时间序列，各序列分别表示了不同的物理特征，蕴含了不同的信息，使原时间序列的信息得以进一步开发和利用，有助于提高模型的预报精度；②均值序列和变幅序列以年为采样间隔，其蕴含了影响地下水位场时间变化的信息，通过对两序列的预报和分析，可有效地追踪地下水位的长期变化趋势；③得到的残差序列在年内变幅为 1，有效地刻划了影响地下水位年内变化各因素的基本特征和相互关系，易于模型的周期识别。

附录　主要符号一览表

第一章

n，孔隙率；

$\boldsymbol{v}(P)$，多孔介质连续体中 P 点的渗流速度矢量，也称达西流速矢量；

$\boldsymbol{u}(P)$，为多孔介质连续体中 P 点的孔隙平均流动速度，也称为地下水实际流速；

z，位置高度（或位置水头）[L]；

$h_p=\dfrac{p}{\gamma}$，称为测压高度[L]，其中 p 为地下水压强（不计大气压强），γ 为地下水容重；

$h=z+\dfrac{p}{\gamma}$，测压管水头[L]；

$\dfrac{u^2}{2g}$，流速水头[L]；

$\boldsymbol{J}$，水力坡度；$\boldsymbol{J}_x$、$\boldsymbol{J}_y$、$\boldsymbol{J}_z$，分别为空间坐标系中的三个分量；

Q，渗流量[LT^{-1}]；

A，渗流过水断面面积[L^2]；

$k=cd^2$ ，内在渗透率（或渗透率）[L^2]， c 为比例系数；d^2 为反映孔隙面积大小的参数。

$\overline{H}$，无压含水层的平均厚度[L]；

ρ，水的密度[GL^{-3}]；

β，水的压缩系数[L^2G^{-1}]；

α，岩石的压缩系数[L^2G^{-1}]；

$\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{\mu}_e}$ ，水的压力传导系数[L^2T^{-1}]；

第二章

q，河渠单位长度的渗漏量[$L^3T^{-1}L^{-1}$]；

b，渠底宽[L]；

m，边坡系数[-]；

$B=b+2mh$，河（渠）水面宽[L]；

σ，每公里长渠道的渗漏损失占通过流量的百分数；

Q，渠道输水流量，m^3/s。

s，河渠水位或地下水位变化值；

ε，降雨入渗补给强度或潜水蒸发强度[$L^3T^{-1}L^{-2}$]；

ε_0，水面蒸发强度[$L^3T^{-1}L^{-2}$]；

Δ，地下水埋深[L]；

Δ_0，潜水蒸发强度接近于零时的地下水埋深[L]，也称极限蒸发深度；

L，两沟（河）之间的距离；

s_c，两沟中间点地下水上升（或下降）高度；

h_c、H_c，两沟中间点地下水位；

h_0，初始地下水位；

H_0，排水沟（管）水位或两沟中间点的初始水位；

δ，地下水面形状修正系数；

第三章

H、H_0，水头(head, L)，H_0为初始水头；

s，降深(drawdown, L), 地下水初始水头与抽水后水头之差，即 $s= H-H_0$；

K，渗透系数或水力传导度(hydraulic conductivity, LT^{-1})，K_x, K_y, K_z表示以坐标方向为主轴的渗透系数分量；

M，承压含水层的厚度(L)；

T，导水系数(transmissivity, LT^{-2}), 承压含水层渗透系数与厚度的乘积，即 $T=KM$；

μ_e^*（或 S_s），储水率(specific storage, L^{-1})；

μ_e (或 S)，承压含水层的弹性储水系数(storage coefficient, -)或释水系数，$S=S_s M$，或$\mu_e=\mu_e^* M$；

S_y、μ，潜水含水层的给水度(specific yield, -)，若含水层得到补给，μ 为自由孔隙率或称饱和差；

K_c，弱透水层的垂向渗透系数(LT^{-1})；

m_c，弱透水层的厚度(L)；

L_c，越流系数(leakance, T^{-1}), 反映地下水穿过弱透水层的能力，有 $L_c=K_c/m_c$；

B，越流因子(leakage factor, L)，反映承压含水层的封闭性，有 $B=(T/L_c)^{1/2}$；

α，Boulton 滞后指数(Boulton’s delay index, T^{-1})，反映潜水面下降时释水滞后性；

Q, 井孔的出水流量(L^3T^{-1})；

r_w, 井孔的半径(L)，一般指井孔滤管的半径；

r_e，考虑表皮效应后井孔的有效半径(L)；

C, 井损系数($L^{-5}T^2$)；

第五章

θ_g ，土壤重量含水率[-]；

θ_v ，土壤体积含水率[-]；

φ_w ，土水势，即土壤水的总势能；

φ_g ，重力势；

φ_p ，压力势（或气压势φ_a）；

φ_m ，基质势（或基膜势）；

φ_s ，溶质势（渗透压势）；

φ_T ，温度势；

$s=-\varphi_m$，土壤水的基质吸力；

h，土壤负压水头[L]；

z，重力势（或重力水头）[L]；

$H=h+z$，总土水势（或总水头）；

θ，土壤含水率[-]；

θ_s，饱和土壤含水率[-]；

θ_r，土壤残余含水率，通常采用最大分子持水率[-]；

$C(h)$，容水度（或比水容量）[L^{-1}]；

$K(\theta)$和 $K(h)$，非饱和土壤水力传导度（或导水率）[LT^{-1}]；

$D(\theta)$和 $D(h)$，土壤水的扩散度；

q_l、q_v，液态水通量、水汽通量；

q_m，土壤水分的总通量；

q_h，土壤热通量；

D，水汽扩散系数；

ρ_l、ρ_v，液态水的密度、水汽的密度；

T，温度；

θ_a，土壤体积含气率；

D_{Ta}，温度梯度作用下吸附水流的运移系数；

D_{hv}，基质势梯度作用下水汽的给水系数；

D_{Tv}，温度梯度作用下水汽的给水系数；

λ，土壤的热传导系数[$Jcm^{-1}°C^{-1}s^{-1}$]；

L，水的蒸发潜热[Jg^{-1}]；

C_l，水的比热[$Jcm^{-3}°C^{-1}$]；

T_0，参照系的温度；

$C=\sum_{i=1}^{5}C_i\theta_i$，含水、汽介质中的热容量($cal/cm^3$)；$C_i$ 为各组分体积热容量；

L_0，在参考温度 T_0 下的蒸发潜热(cal，在 T_0=20℃时 L_0=585ca1/g)；

W，微分吸湿热；

C_v，常温下水蒸汽比热；

j，热功当量；

g，重力加速度；

i，入渗率[L/T]；

I，累积入渗量[L]；

E，表土蒸发强度[L^3T^{-1} 或 LT^{-1}]；

第六章

C，溶质的浓度[ML^{-3}]；

J_C，溶质的对流通量；

J_d，溶质的分子扩散通量；

D_s，溶质的分子扩散系数[L^2/T]；

D_h，机械弥散系数[L^2/T]；

J_h，溶质的机械弥散通量；

α，弥散度[L]；

$D=D_s+D_h$，水动力弥散系数；

J_D，水动力弥散所引起的溶质通量；

M，固相的比表面[L]；

R_d，解吸（吸附）作用的延迟因子；

$J= J_C+ J_D$，溶质的总通量；

θ_m，可动水体含水量；θ_{im}，不动水体含水量； $\theta_m+\theta_{im}=\theta$；

S，不动水体的浓度；

μ，流体的黏度；

α_L，纵向弥散度[L]；

V，平均孔隙流速[LT^{-1}]；

$p_e=\dfrac{V\Delta x}{D}$，peclet 数；

$c=\dfrac{V\Delta t}{\Delta x}$，courant 数；

第七章

$f(u)$，概率密度函数；

$F(u)$，累积分布函数；

μ，随机变量的均值（在第三节中又表示给水度？怎么区分？）；σ，标准差；

$C_U(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)$，自协方差函数（简称协方差函数）；

ρ_U，自相关系数，取值区间为[-1，1]；

λ_i，相关尺度；

$f_{UV}(u,\mathrm{x}_1; v,\mathrm{x}_2)$，两不同随机场的联合概率密度函数；

$F_{UV}(u,\mathrm{x}_1; v,\mathrm{x}_2)$，两不同随机场的联合分布函数；

$C_{UV}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)$，两随机场的互协方差函数；

ρ_{UV}，两随机场的相关系数；

$<x>$，随机变量 x 的集平均；

$<f(\mathbf{x})>$，函数 $f(\mathbf{x})$的均值；

C(x,y)，二维随机场的协方差函数；

C，液相中溶质的浓度；

C_s，吸附溶质的浓度；

ρ，土壤容重；

V_i，土壤水流速在 x_i 方向的分量；

D_{ij}，实验室尺度的弥散系数张量的第（i, j）个分量；

α_L、α_T ，孔隙尺度纵向和横向弥散度；

V，孔隙流速；

D_d，溶质在自由水体中的离子或分子扩散系数；

τ，孔隙的弯曲率因子；

$K_d\,(k, x)$，吸附系数，是一个空间随机函数；

参考文献

安鸿志. 1992. 时间系列分析. 上海：华东师范大学出版社.

北京地质学院,1961,地下水动力学,北京：中国工业出版社.

贝尔. 1983. 多孔介质中流体动力学. 北京：中国建筑工业出版社.

贝尔. 1985. 地下水水力学. 北京：地质出版社.

蔡季冰. 1989. 统辨识，北京理工大学出版社。

蔡树英. 杨金忠. 伍靖伟. 2002. 土壤渗透参数空间变异性的试验研究. 中国农村水利水电，11: 13~17.

常安定. 王洪胜. 2000. 两种流态区域条件下井流问题的解析解. 水利学报. 6(6): 49~53

陈崇希，胡佩清，林敏. 1961. 地下水动力学. 北京：中国工业出版社.

陈崇希，李国敏. 1996. 地下水溶质运移理论与模型. 北京：中国地质大学出版社.

陈崇希，唐仲华. 1989. 地下水流运动的数值方法. 北京：中国地质大学出版社.

陈崇希. 1966. 地下水动力学. 北京：北京地质学院.

陈崇希. 1975. 地下水不稳定井流计算方法. 北京：武汉地质学院.

陈崇希. 1981. 层状非均质无压含水层中地下不稳定井流计算方法.武汉地质学院学报. (1) : 222~228

陈崇希. 1982. 地下水资源评价的原则和勘探思想的探讨. 见：地质部水文地质工程地质研究所编. 中国地质学会首届地下水资源评价学术会议论文选编——地下水资源评价理论与方法的研究. 北京：地质出版社.

陈崇希. 1983. 地下水不稳定井流计算方法. 北京：地质出版社.

陈崇希. 胡立堂. 王旭升. 2007. 地下水流模拟系统 PGMS(1.0 版)简介. 水文地质工程地质. (6): I~II.

陈崇希. 林敏. 1999. 地下水动力学. 武汉：中国地质大学出版社.

陈崇希. 唐仲华. l990. 地下水流动问题数值方法.武汉：中国地质大学出版社。

陈崇希. 吴修义. 1979. 边界附近地下水不稳定井流试验数据的分析法. 见：综合治理和利用矿床大面积地下水经验汇编. 北京: 煤炭工业出版社. 22 ~ 41.

陈雨孙. 1977. 单井水力学. 北京: 中国建筑工业出版社.

郭东屏. 1994. 地下水动力学. 西安：陕西科学技术出版社.

郭东屏等. 1994. 渗流理论基础. 西安：陕西科学技术出版社.

韩志刚. 1989. 多层递阶方法及其应用. 北京：科学出版社.

汉克斯. 1984. 应用土壤物理. 北京：水利电力出版社.

胡佩青. 1982. 有越流补给时流向面状井的地下水不稳定流计算. 北京：地质出版社

黄冠华. 1999. 非饱和水流动态空间变异的随机分析. 水利学报，4：75~80.

瞿兴业, 张友义. 1981. 考虑蒸发影响和脱盐要求的田间排水沟(管)间距计算, 水利学报，（5）: 1~11.

瞿兴业, 张友义. 1981. 考虑蒸发影响和脱盐要求的田间排水沟(管)间距计算. 水利学报，（5）: 1~11.

瞿兴业，1962，均匀入渗情况下均值土层内地下水向排水沟流动的分析，水利学报，（6），1-20.

卡明斯基. 1955. 地下水动力学原理. 北京：地质出版社.

孔祥言. 1999. 高等渗流力学. 合肥：中国科学技术大学出版社.

雷志栋，杨诗秀，谢森传. 1984. 潜水稳定蒸发的分析与经验公式. 水利学报，第 8 期. 60~64.

雷志栋，杨诗秀，谢森传. 1988. 土壤水动力学. 北京：清华大学出版社.

李保国等. 2000. 农田土壤水的动态模型及应用. 北京：科学出版社.

李佩成. 1981. 测算潜水含水层渗透系数的"割离井"法. 西北农学院学报. (4): 57~70

李佩成. 1990. 地下水非稳定流解析解. 北京：科学出版社.

李少龙. 2006. 多孔介质中水流运动的随机数值方法研究. 武汉大学博士论文.

李文渊，1961，河网化地区地下水动态及其调节控制（研究生毕业论文）。
李先孝. 1991. 时间序列分析基础. 武汉：华中理工大学出版社.
林瑞泰，1995，多孔介质传热传质引论，科学出版社.
刘慈群. 1986. 地下水在粘弹性含水层系中不定常渗流. 应用数学和力学. (11): 969~974.
刘慈群. 1987. 地下水在粘弹性含水层系中的越流. 水利学报. (5): 9~13
陆垂裕，杨金忠， Jayawardane N, Blackwell J. 2004. 污水灌溉系统中氮素转化运移的数值模拟分析. 水利学报. 2004 年 5 期，83－88。
陆垂裕，杨金忠， Jayawardane N, Blackwell J. 2004. 污水灌溉系统中氮素转化运移的数值模拟分析. 水利学报. 2004 年 5 期，83－88。
罗新红等，1986，多层递阶预报方法的改进及其应用[J]，信息控制，15(1)，1~5.
毛昶熙，1990，渗流计算分析与控制，中国水利水电出版社.
缪俊发, 吴林高. 1995. 考虑三维抽水压密变形的粘弹性越流理论. 同济大学学报(自然科学版). (3): 309~314.
潘元伯, 左其亭. 1992. 扇形含水层井流计算通式的研究. 水文地质工程地质. (4): 24~28.
恰尔内，1982，地下水－气动力学，石油工业出版社.
钱正英，张光斗，2001，中国可持续发展水资源战略研究 综合报告及各专题报告，中国水利水电出版社.
任宪韶等，2007，海河流域水资源评价，中国水利水电出版社.
邵明安等，2000，土－根系统水动力学，陕西科学技术出版社.
施普德，1977，井水量计算的理论与实践，地质出版社.
史良胜，杨金忠，李少龙等，2005，基于 KL-Galerkin 解法的地下水流动随机分析[J]，四川大学学报(工程科学版)，37(5): 31~35.
水利部，2006，中国水资源公报 2005，中国水利水电出版社.
水利部，2007，中国水资源公报 2006，中国水利水电出版社.
水利部水资源司，南京水利科学研究院，2004，21 世纪初期中国地下水资源开发利用，中国水利水电出版社.
宿青山, 高鹭陵. 1985. 瞬时抽水时潜水完整井地下水运动公式的建立及其应用. 吉林大学学报(地球科学版). (4): 73~78.
孙讷正. 1981. 地下水流的数学模型和数值方法，地质出版社.
孙讷正. 1989 地下水污染：数学模型与数值方法，地质出版社.
陶同康. 1999. 土工合成材料与堤坝渗流控制，中国水利水电出版社.
王丽影, 杨金忠, 伍靖伟, 周发超. 2008. 再生水灌溉条件下氮磷运移转化实验与数值模拟.地球科学-中国地质大学学报，33（2），266~272.
王丽影, 杨金忠, 伍靖伟, 周发超. 2008. 再生水灌溉条件下氮磷运移转化实验与数值模拟.地球科学-中国地质大学学报，33（2），266~272.
王旭升, 陈崇希, 焦赳赳. 2003. 承压含水层井流-盖层弯曲效应的解析理论. 地球科学——中国地质大学学报. 28(5): 545~550.
王旭升, 陈崇希. 2002. 改进的 Theis 井流模型及其解析解—考虑含水层顶板的挠曲作用. 地球科学—中国地质大学学报. 27(2): 199~202.
希勒尔. 1981. 土壤和水－物理原理和过程. 农业出版社.
项静恬, 史九恩, 周琴芳, 杜金观, 孔楠. 1991. 动态和静态数据处理－时间序列和数理统计分析[M]. 气象出版社.
谢永华, 黄冠华, 赵立新. 1998. 田间土壤特性的空间变异性[J]. 中国农业大学学报. 3(2): 41~45.
徐献芝, 孔祥言, 卢德唐. 1996. KDQ-SPJ1.0 水平井试井软件中样板曲线的计算方法和拟合方法. 石油勘探与开发. 23(1): 84~87.
徐学祖等，2001，冻土物理学，科学出版社.
薛定谔，1982，多孔介质中的渗流物理，石油工业出版社.
薛禹群, 谢春红, 2007. 地下水数值模拟. 科学出版社.
薛禹群, 谢春红. 1980. 文地质学的数值法，煤炭工业出版社.
薛禹群主编. 1986. 地下水动力学原理. 地质出版社.

杨金忠, Jayawardane N, Blackwell J, 陆垂裕. 2004. 污水灌溉系统中氮磷转化运移的试验研究. 水利学报. 2004 年 4 期. 72~79。
杨金忠, 蔡树英, 黄冠华, 叶自桐. 2000. 多孔介质中水分及溶质运移的随机理论. 科学出版社.
杨金忠, 蔡树英. 1989. 土壤中水、汽、热运动的藕合模型和蒸发模拟. 武汉水利电力学院学报. 22（4）. 35~43.
杨金忠, 蔡树英. 1993. 区域水盐动态预测预报理论与方法的研究[J]. 武汉水利电力大学.
杨金忠, 叶自桐, 贾维钊等. 1993. 野外非饱和土壤中溶质运移的试验研究[J]. 水科学进展. 4(4): 245~262.
杨金忠, 叶自桐. 1994. 野外非饱和土壤水流运动速度的空间变异性及其对溶质运移的影响[J]. 水科学进展. 5(1): 9~17.
杨金忠，Jayawardane N, Blackwell J, 陆垂裕. 2004, 污水灌溉系统中氮磷转化运移的试验研究，水利学报，2004 年 4 期，72~79。
杨金忠. 1986. 溶质通过饱和-非饱和土体的理论与试验研究，武汉水利电力大学博士论文.
杨天行等. 1980. 地下水流向井的非稳定运动的原理及计算方法. 地质出版社.
杨位钦，顾岚. 1986. 时间序列分析与动态数据建模，北京工业学院出版社。
叶水庭，施鑫源，苗晓芳，1982，用潜水蒸发经验公式计算给水度问题的分析，水文地质工程地质. 第 4 期.
张朝新，1984，潜水蒸发系数分析，水文，第 6 期.
张宏仁，1975，地下水非稳定流理论的发展和应用，地质出版社.
张宏仁，1992，地下水水力学的发展，地质出版社.
张仁铎，2005，空间变异理论及应用，科学出版社.
张蔚榛，1983，地下水非稳定流计算和地下水资源评价，科学出版社.
张蔚榛，1989. 考虑井孔蓄水和延迟给水作用时潜水含水层非稳定流. 水利学报. (2): 1~16.
张蔚榛，1998，沈荣开，地下水文与地下水调控，中国水利水电出版社.
张蔚榛等，1981，包气带水分运移问题讲座-包气带水分运移基本方程，水文地质工程地质，第一期.
张蔚榛等，1996，地下水与土壤水动力学，中国水利水电出版社.
郑宇宏，韩光文. 1989. 多层递阶预报参数估计初始选择的循环方法，控制理论及应用. 6(4)：89-95。
朱学愚，谢春红，1990，地下水运移模型，中国建筑工业出版社.
Ababou R, et al, 1989, Numerical simulation of three-dimensional saturated flow in randomly heterogeneous porous media[J], Transp. Por. Med., 4(6), 549-565.
Bachmat Y, J Bear. 1964. The general equations of hydrodynamic dispersion in homogeneous. isotropic porous media. J Geophy Res. 69. 2561-2567.
Bachmat Y, J Bear. 1983. The dispersion flux in transport phenomena in porous media. Advances in Water Res. 6(3). 169-174.
Bakr AA, LW Gelhar, AL Gutjahr, and JR MacMillan. 1978. Stochastic analysis of spatial variability in subsurface flows. 1. Comparison of one- and three-dimensional flows[J]. Water Resources Research. 14(2). 263-271.
Bear J and Y Bachmat. 1990. Introduction to modeling of transport phenomena in porous media. Kluwr Academic Publisher.
Bear J and Y Bachmat. 1990. Introduction to modeling of transport phenomena in porous media. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.
Bear J, 1972. Dynamics of Fluids in Porous Media. New York: Elsevier.
Bear J. 1969. Hydrodynamic dispersion, In: Flow through porous media. RJM De Wiest Ed.. 169-200. Academic Press. New York.
Bear J. 1972. Dynamics of fluids in porous media. American Elesvier. New York.
Bear J. 1979. Hydraulics of Ground water. Jerusalem. McGraw-Hill Inc.
Bellin, A. Rinaldo A, Bosma W J P,. van der Zee S E A T M, and Rubin Y. 1993. Linear equilibrium adsorbing solute transport in physically and chemically heterogeneous porous formations 1. analytical solutions, Water Resour. Res., 29(12), 4019-4030.
Boggs J M, SC Young, LM Beard, LW Gelhar, KR Rehfeldt, and EE Adams. 1992. Field study of dispersion in a heterogeneous aquifer 1. overview and site description. Water Resour Res. 28(12). 3281-3291.

Boulton N S. 1954. The drawdown of water table under non-steady conditions near a pumped well in an unconfined formation. Proc. Institute of Civil Engineers. 3(Part III): 564-579.

Boulton N S. 1963. Analysis of data from non-equilibrium pumping tests allowing for delayed yield from storage. Proc Inst Civil Engrs. 26:469-482.

Brooks R H, Corey A T. 1964. Hydraulic properties of porous media[J] Hydrologypaper 3. Colo State University，Fort Collins.

Burr DT, EA Sudicky, and RL Naff. 1994. Nonreactive and reactive solute transport in three-dimensional heterogeneous porous media: mean displacement. plume spreading and uncertainty[J]. Water Resour Res. 30(3). 791-815.

Carvollo HO et al. 1976. Spatial variability of in situ unsaturated hydraulic conductivity in Maddock sandy loam[J] Soil Sci. 121(1). 1-8.

Christopher JN, Matthew JT. 2004. Modeling multiaquifer wells with MODFLOW. Ground Water. 42(6): 910-919.

Cooper HH, Bredehoeft JD, Padadopulos I S. 1967. Response of a finite-diameter well to an instantaneous charge of water Water Resources Research. 3:263-269

Dagan G. 1989. Flow and transport in porous formations. Springer-Verlag. New York.

Dagan, G. 1982a. Analysis of flow through heterogeneous random aquifers 2. unsteady flow in confined formations, Water Resour. Res., 18(5), 1571-1585.

Dagan, G. 1982b. Stochastic modeling of groundwater flow by unconditional and conditional probabilities, 2. the solute transport, Water Resour. Res., 18(4), 835-848.

Dagan, G. 1984. Solute transport in heterogeneous formations, J. Fluid Mech., 145,151-177.

Daviau F, Mouronval G, Bourdaror P and Curutchet P. 1988. Pressure analysis for horizontal wells SPE Formation Evaluation. December: 716-724.

Daviau F, Mouronval, G, Bourdarot, G and P Curutchet. 1985. Pressure analysis for horizontal wells. SPE Paper 14251. presented at the 60th Annual Technical Conference and Exhibition in Las Vegas. NV. Sept 22-25.

De Vries DA. 1958. Simultanious transfer of heat and moisture in porousmedia. Trans Amer Geophys Union. 39(5). 909-916.

Dettinger M D, Wilson J L. 1981. First-order analysis of uncertainty in numerical models of groundwater, 1, Mathematical development[J]. Water Resour. Res. 17(1): 149-161.

Diersch H-JG, Kolditz O. 1998. Coupled groundwater flow and transport: 2. Thermohaline and 3D convection systems. Adv Water Resour. 21 (5): 401–425.

Durner W. 1994. Hydraulic conductivity estimation for soils with heterogeneous pore structure. Water Resour. Res. 32:211~223.

Durner W. 1994. Hydraulic conductivity estimation for soils with heterogeneous pore structure. Water Resour. Res. 32:211~223.

Feddes R A, Kowalik P J, and Zaradny H. 1978. Simulation of field water use and crop yield. John Wiley & Sons. New York.

Feddes R A, Kowalik P J, and Zaradny H. 1978. Simulation of field water use and crop yield. John Wiley & Sons, New York.

Freeze RA. 1975. A stochastic-conceptual analysis of one-dimensional groundwater flow in nonuniform homogeneous media[J]. Water Resour Res. 11(5). 725-741.

Fried J J. 1975. Groundwater pollution. Elsevier. Amsterdam.

Gardner W R, Hillel D, and Benyamini Y. 1970. Post irrigation movement of soil water: I. Redistribution. Water Resiurces Res, 6(3): 851~861; II. Simultaneous redistribution and evaporation, Water Resources Res. 6(4): 1148~1153.

Gardner WR. 1958. Some steady state solutions of unsaturated moisture flow equations with application to evaporation from a water table[J]. Soil Sci. 85. 228-232.

Gardner WR. 1958. Some steady state solutions of unsaturated moisture flow equations with application to evaporation from a water table. Soil Sci. 85. 228-232.

Gelhar L W, Axness C L. 1983. Three-dimensional stochastic analysis of macrodispersion in aquifers[J]. Water Resour Res.19(1): 161−180.

Gelhar L W, Welty C, Rehfeldt K R. 1992. A critical review of data on field-scale dispersion in aquifers[J]. Water Resour Res. 28(7). 1955-1974.

Gelhar LW. 1992. Stochatic subsurface hydrology. Prentice Hall. Englewood Cliffs. New Jersey.

Ghanem R, Spanos P D. 1991. Stochastic finite elements: A spectral approach[M]. Springer. New York.

Girinskii N K. 1946. Generalization of some solutions for wells to more complicated natural conditions (in Russian). Dokl Akad Nauk USSR 3. 54–54.
Gomez-Hernandez J J, Wen X H. 1998. To be or not to be multi-Gaussian? A reflection on stochastic hydrology[J]. Adv water resour . 21(1): 47~61.
Goode P A, Thambynayagam R K M. 1987. Pressure drawdown and build up analysis of horizontal wells. SPE Formation Evaluation. December: 683-697.
Guadagnini A, Neuman S P. 1999a. Nonlocal and localized analyses of conditional mean steady state flow in bounded. randomly nonuniform domains: 1. Theory and computational approach[J]. Water Resour Res.35(10): 2999-3018.
Guadagnini A, Neuman S P. 1999b. Nonlocal and localized analyses of conditionalmean steady state flow in bounded randomly nonuniform domains: 2. Computational examples[J]. Water Resour Res. 35(10): 3019-3039.
Gutjahar A L et al.1978. Stochastic analysis of spatial variability in subsurface flows. 2. evaluation and application. Water Resour Res. 14(5). 953-959.
Halford K J, Hanson R T. 2002. User guide for the drawdown-limited. Multi-Node Well (MNW) Package for the U.S. Geological Survey's modular three-dimensional finite-difference ground-water flow model. Versions MODFLOW-96 and MODFLOW-2000. U.S. Geological Survey. Open-File Report 02-293.
Hantush M S. 1967. The growth and decay of groundwater mounds in response to uniform percolation. Water Resources Research. 3(1). 227~234.
Hantush M S. 1967. The growth and decay of groundwater mounds in response to uniform percolation, Water Resources Research, 3(1), 227~234.
Hantush MS, 1961b, Aquifer tests on partially penetrating wells, J Hydraulic Div, Proc. Amer. Soc. Civil. Engrs. Vol.87(HY5):171-195.
Hantush MS, Jacob CE 1955, Non-steady radial flow in an infinite leaky aquifer, Trans. Amer. Geophys. Union. 36: 95-100.
Hantush MS. 1959. Non-steady flow to flowing wells in leaky aquifers. J Geophys Res. 64: 1043-1052.
Hantush MS. 1960. Modification of the theory of leaky aquifers. J. Geophys Res. 65: 3713-3725.
Hantush MS. 1961a. Drawdown around a partially penetrating well. J Hydraulic Div. Proc Amer Soc Civil Engrs Vol.87(HY4):83-89.
Harbaugh AW, Banta ER, Hill MC, et al. 2000. Modflow-2000 the US Geological Survey Modular Ground-Water Model—user guide to modularization concepts and the ground-water flow process Reston: US Geological Survey. Open-File Report 00-92.
Harbaugh AW, McDonald MG. 1996. Programmer's Documentation for MODFLOW-96, an update to the US Geological Survey Modular Finite-Difference Ground-Water Flow Model. Reston. US Geological Survey. Open-File Report 96-486.
Harter T, Zhang D. 1999. Water flow and solute spreading in heterogeneous soils with spatially variable water content[J]. Water Resour Res. 35: 415–426.
Hess K M, Wolf S H, and Celia M A. 1992. Large-scale natural gradient test in sand and gravel, Cape Cod, Massachusetts, 3. Hydraulic conductivity variability and calculated macrodispersivities. Water Resources Res. 28(8): 2011-2027.
Hillel D . 1980. Fundamentals of Soil Physics. ACADMIC PRESS.
Huyakorn PS, and GI Pinder, 1989, Computationat methods in subsurface flow, Academic Press, New York.
Jacob CE, 1940, On the flow of water in an elastic artesian aquifer, Trans Amer Geophys Union, 21(Part2): 574-586.
Jacob CE, Lohman SW 1952, Nonsteady flow to a well of constant drawdown in extensive aquifer, Trans Amer Geophys Union, 33(4): 559-569.
Jury G, 1985, Spatial variability of soil properties.
Kipp Ken L J, 1987, HST3D: A computer code for simulation of heat and solute transport in three-dimensional ground-water flow systems, US Geology Survey Water-Resources Investigations Report 86-4095.
Koltermann,C E and Gorelick S M. 1966. Heterogeneity in sedimentary deposits: A review of structure-imitating, process-imitating, and descriptive approaches, Water Resour. Res., 9 2617-2629.
Kosugi K. 1996. Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties. Water Resour. Res. 32:2697~2703.

Kosugi K. 1996. Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties. Water Resour. Res. 32:2697~2703.

Langergraber G and Simunek J. 2005. Modeling variably saturated water flow and multi-component reactive transport in constructed wetlands. Vadose Zone J. 4:924~938.

Langergraber G and Simunek J. 2005. Modeling variably saturated water flow and multi-component reactive transport in constructed wetlands. Vadose Zone J. 4:924~938.

Lantz R B. 1971. Quantitative evaluation of numerical diffusion (truncation error), Soc. Petrol. Eng. J., 11, 315-320.

Lantz R B. 1971. Quantitative evaluation of numerical diffusion (truncation error), Soc. Petrol. Eng. J., 11, 315-320.

Lantz RB, 1971, Quantitative evaluation of numerical diffusion (truncation error), Soc Petrol Eng J, 11, 315-320.

Li SG, Liao HS, Ni, Chuen-Fa, 2004, A computationally practical approach for modeling complex mean flows in mildly heterogeneous media[J], Water Resour Res,,40(12): 10.1026/2004WR003469.

Li SG, Mclaughlin D, 1991, A nonstationary spectral method for solving stochastic groundwater problems: Unconditional analysis, Water Resour Res, 27(7): 1589~1605.

Li SG, Mclaughlin D, Liao H S, 2003, A computationally practical method for stochastic groundwater modeling, Adv Water Resour, 26: 1137~1148.

Lin HC, Richards DR, Yeh GT, Cheng JR, Cheng HP, Jones NL, 1997, FEMWATER: A Three-Dimensional Finite Element Computer Model for Simulating Density-Dependent Flow and Transport in Variably Saturated Media, Vicksburg: Technical Report CHL-97-12, Waterways Experiment Station, US Army Corps of Engineers, MS 39180-6199.

Lu Z, Zhang D, 2002b, Stochastic analysis of transient flow in heterogeneous variably saturated porous media: the van Genuchten-Mualem constitutive model[J], Vadose Zone J, 1: 137-149.

Mackay DM, DL, Freberg, and JA Cherry, 1986, A natural gradient experiment on solute transport in a sand aquifer, 1, Approach and overview of plume movement[J], Water Resour Res, 22(13), 2017-2029.

Mantoglou A, and LW Gelhar,1987a, Stochastic modeling of Large-scale transient unsaturated flow system[J], Water Resour Res, 23(1), 37-46.

Mantoglou A, and LW Gelhar,1987b, Capillary tension head variance, mean soil moisture content and effective specific soil moisture capacity[J], Water Resour Res, 23(1),47-56.

Mantoglou A, and LW Gelhar,1987c, Effective hydraulic conductivities of transient unsaturated flow in stratified soils[J], Water Resour Res, 23(1), 57-67.

Mantoglou A, Wilson J L, 1982, The turning bands method for simulation of random fields using line generation by a spectral method[J], Water Resour Res, 18: 1379-1394.

McDonald MG, AW Harbaugh, 1988, A modular three-dimensional finite-difference ground-water flow model, Techniques of Water-Resources Investigations of the US Geological Survey, Chapter A1, Book 6.

Milly PCD, 1982, Moisture and heat transport in hysteretic,inhomogeneous porous media: A matric heat-based formation and numerical model, Water resources Research, 18(3),489-498.

Milly PCD, A , 1984, simulation analysis of thermal effect on evaporation from soil, Water resources Research, 20(8), 1087-1098.

Moltyaner G L, 1986. Stochastic versus deterministic: A case study, Hydrogeologie, 2, 183-196.

Narasimhan TN, Witherspoon PA, 1976, An integrated finite difference method for analyzing fluid flow in porous media, Water Resour Res, 12 (1): 57–64.

Neuman SP, 1972, Theory of flow in unconfined aquifers considering delayed response of the watertable, Water Resources Res, 8: 1031-1045.

Neuman SP, 1975, Analysis of pumping test data form anisotropic unconfined aquifers considering delayed gravity response, Water Resources Res, 11:329-342

Neuman SP, 1979, Perspective on 'Delayed Yield', Water Resources Res, 15: 899-908.

Neuman SP, Orr S, 1993, Prediction of steady flow in nonuniform geologic media by conditional moments: exact nonlocal formalism effective conductivity and weak approximation[J], Water Resour Res,,29(2): 341-364.

Nielsen DR, JW Biggar, and KT Erh, 1973, Spatial variability of field measured soil-water properties, Hilgardia, 42(7), 215-260.

Painter S, 1996, Evidence for non-Gaussian scaling behavior in heterogeneous sedimentary formations[J], Water Resour Res, 32(5): 1183-1195.

Payre G, M De Broissia, J Bazinet, 1982, An "Upwind" finite element method via numerical integration, Int J Num Meth Eng 18, 381-396.
Peaceman DW, 1978, Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation, Society of Petroleum Engineers Journal, 18(3):183–194.
Peaceman DW, 1983, Interpretation of well-block pressure in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability, Society of Petroleum Engineers Journal, 23(3): 531–543.
Philip J R. 1955. Numerical solution of equation of the diffusion type with diffusivity concentration dependent. Trans. Paraday Soc. 51, 885~892.
Philip JR, and De Vries, DA , 1957, Moisture movement in porous media under temperature gradients, Tans Amer Geophys Union, 38(2), 222-228.
Prickett TA, 1965, Type-curve solution to aquifer tests under water-table conditions, Ground Water, 3(3): 5~14.
Prickett TA, 1967, Designing pumping well characteristics into electrical analog models, Ground Water, 5(4): 38-46.
Rehfeldt KR, Boggs J M, Gelhar W, 1992, Field study of dispersion in a heterogeneous aquifer, 3. Geostatistical analysis of hydraulic conductivity[J], Water Resour Res,,28(12): 3309-3324.
Richards L A, 1931, Capillary conduction through porous mediums, Physics 1, PP.313-318.
Roy RV, Grilli ST, 1997, Probabilistic analysis of the flow in random porous media by stochastic boundary elements[J], Engrg Analysis with Boundary Elements, 19: 239-255.
Russo D and Dagan G. 1991. On solute transport in heterogeneous porous formation under saturated and unsaturated water flows[J]. Water Resour. Res. 27(2): 285-292.
Russo D, 1988, Determinating soil hydraulic properties by parameter estimation: On the selection of a model for the hydraulic properties[J], Water Resour Res, 24(3), 453- 495.
Russo D, and M Bouton, 1992, Statistical analysis of spatial variability in unsaturated parameters[J], Water Resour Res, 28(7), 1911-1925.
Simunek J and van Genuchten M Th. 1994. The CHAIN_2D code for simulating two-dimensional movement of water fl ow, heat, and multiple solutes in variably-saturated porous media. Version 1.1. Res. Rep. 136. U.S. Salinity Lab., Riverside, CA.
Simunek J and van Genuchten M Th. 1994. The CHAIN_2D code for simulating two-dimensional movement of water fl ow, heat, and multiple solutes in variably-saturated porous media. Version 1.1. Res. Rep. 136. U.S. Salinity Lab., Riverside, CA.
Simunek J, Sejna M, Saito H, Sakai M, van Genuchten, M Th. 2008. The HYDRUS-1D Software Package for Simulating the Movement of Water, Heat, and Multiple Solutes in Variably Saturated Media, Version 4.0, HYDRUS Software Series 3, Department of Environmental Sciences, University of California Riverside, Riverside, California, USA, p. 315.
Simunek J, Sejna M, Saito H, Sakai M, van Genuchten, M Th. 2008. The HYDRUS-1D Software Package for Simulating the Movement of Water, Heat, and Multiple Solutes in Variably Saturated Media, Version 4.0, HYDRUS Software Series 3, Department of Environmental Sciences, University of California Riverside, Riverside, California, USA, p. 315.
Simunek J, van Genuchten, M Th, and Sejna M. 2008. Development and Applications of the HYDRUS and STANMOD Software Packages and Related Codes. Vadose Zone J. 7(2): 587~600
Simunek J, van Genuchten, M Th, and Sejna M. 2008. Development and Applications of the HYDRUS and STANMOD Software Packages and Related Codes. Vadose Zone J. 7(2): 587~600
Srivastava R, Yeh T–C J, 1991, Analytical solutions for one dimensional transient infiltration toward the water table in homogeneous and layered soil[J], Water Resour Res, 27(5): 753-762.
Sudicky, EA, 1986, A natural gradient experiment on solute transport in a sand and gravel aquifer, spatial variability of hydraulic conductivity and its role in the dispersion process[J], Water Resour Res, 22(13), 2069-2082.
Sun, NZ, W W-G Yeh, 1983, A proposed upstream weight numerical method for simulating pollutant transport in groundwater, Water Resour Res, 19(6), 1489-1500.
Tarshish M, 1992, Combined Mathematical Model of Flow in an Aquifer-Horizontal Well System, Ground Water, 30(6): 931-935
Tartakovsky DM, Neuman S P,1998a, Transient flow in bounded randomly heterogeneous domains: 1. Exact conditional moment equations and recursive approximations[J], Water Resour Res, 34(1): 1-12.
Tartakovsky DM, Neuman S P,1998b, Transient flow in bounded randomly heterogeneous domains: 2.

Localization of conditional mean equations and temporal nonlocality effects[J], Water Resour Res, 34(1): 13-20.
Theim G, 1906, Hydrologische Methoden, Gebhardt, Leipzig.
Theis CV, 1935, The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using groundwater storage, Trans Amer Geophys Union, 16: 519-524.
Tompson AF, Gelhar L W, 1990, Numerical simulation of solute transport in three dimensional randomly heterogeneous porous media[J], Water Resour Res, 26: 2541-2562.
Unlu, K, Nielsen, D R, Biggar, J W, Morkoc, F, 1990, Statistical parameters characterizing the spatial variability of selected soil hydraulic properties[J], Soil Sci soc Am J,54: 1537-1547.
US Army Corps of Engineers, 2007, GMS, Groundwater Modeling System Engineer Research and development center, US Army Corps of Engineers http://chl.erdc.usace.army.mil/software/gms.
Van Everdingen AF, 1953, The skin effect and its influence on the productive capacity of a well, Trans AIME 198: 171-176.
van Genuchten M Th, 1980, A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils[J], Soil Sci Soc Am J, 44, 892-898.
Vogel T. 1987. SWMII: Numerical model of two-dimensional flow in a variably saturated porous medium. Res. Rep. 87. Dep. of Hydraul. and Catchment Hydrol., Agricultural Univ., Wageningen, the Netherlands.
Vogel T. 1987. SWMII: Numerical model of two-dimensional flow in a variably saturated porous medium. Res. Rep. 87. Dep. of Hydraul. and Catchment Hydrol., Agricultural Univ., Wageningen, the Netherlands.
Vrugt, J A, van Wijk MT, Hopmans J W and Simunek J. 2001. One-, two-,and three-dimensional root water uptake functions for transient modeling. Water Resour. Res. 37:2457~2470.
Vrugt, J A, van Wijk MT, Hopmans J W and Simunek J. 2001. One-, two-,and three-dimensional root water uptake functions for transient modeling. Water Resour. Res. 37:2457~2470.
Warrick AW, 2002, Soil Physics Compannion, CRC Press.
Waterloo Hydrogeologic Inc. 2004, Visual Modflow v.4.0 User's Manual, Waterloo: Waterloo Hydrogeologic Inc.
Wenzel LK, 1936, The Theim method for determining permeability of waterbearing materials and its application to the determination of specific yield, U.S. Geological Survey Water-Supply paper679-A, Washington, D.C., 57
White I, and MJ, Sully, 1992, On the variability and use of the hydraulic conductivity Alpha parameter in stochastic treatments of unsaturated flow[J], Water Resour Res, 28(1), 209-213.
Wiener, N. 1938. The homogeneous chaos[J]. Am. J. Math. 60: 897-936.
Xu Sheng Wang, Chong Xi Chen, Jiu J Jiao, 2004, Modified Theis equation by considering the bending effect of the confining unit, Advances in Water Resources, 27: 981-990.
Yang J, R Zhang, J Wu, and MB Allen, 1996, Stochastic analysis of adsorbing solute transport in two-dimensional unsaturated soils[J], Water Resour Res, 32(9), 2747-2756.
Yang J, Zhang D, Lu Z, 2004, Stochastic analysis of saturated-unsaturated flow in heterogeneous media by combining Karhunen-Loeve expansion and perturbation method[J], J Hydrol, 294: 18-38.
Yeh, T-C J, LW Gelhar, and AL Gutjahr, 1985, Stochastic analysis of unsaturated flow in heterogeneous soils, 1. statistically isotropic media, Water Resour Res, 21(4), 447-456.
Yeh, T-C, Gelhar L W, and Gutjahr A L. 1985. Stochastic analysis of unsaturated flow in heterogeneous soils, 3, Observation and Application. Water Resources. Res., 21(4), 465-471.
Yeon-Soo J, N Sitar, A D Kiureghian, 1994, Reliability analysis of contaminant transport in saturated porous media, Water Resour Res, 30(8), 2435-2448.
Zhang D, Lu Z, 2004, An efficient higher-order perturbation approach for flow in randomly heterogeneous porous media via Karhunen-Loeve decomposition[J], J Comput Phys, 194(2): 773-794.
Zhang D, 1998, Numerical solutions to statistical moment equations of groundwater flow in nonstationary bounded heterogeneous media[J], Water Resour Res, 34(3): 529-538.
Zhang D, 1999, Nonstationary stochastic analysis of transient unsaturated flow in randomly heterogeneous media[J], Water Resour Res, 35(4): 1127–1141.
Zhang D, 2002, Stochastic Methods for Flow in Porous Media:Coping With Uncertainties, San Diego: Academic Press, 350.
Zhang D, Wallstrom T C, Winter C L, 1998, Stochastic analysis of steady state unsaturated flow in heterogeneous media: Comparison of the Brooks-Corey and Gardner-Russo models[J]. Water

Resour Res, 34(6): 1437-1449.
Zhang D, Winter C L, 1998, Nonstationary stochastic analysis of steady-state flow through variably saturated heterogeneous media[J], Water Resour Res, 34: 1091–1100.
Zheng C, Wang P P 1999, MT3DMS: A Modular Three-Dimensional Multispecies Transport Model for Simulation of Advection, Dispersion, and Chemical Reactions of Contaminants in Groundwater Systems; Documentation and User's Guide, Washington: US Army Engineer Research and Development Center, Contract Report SERDP-99-1.
ВедерниковВ. В., 1939, Теория фильтраuии и ее применение в области ирригации и дренажа, госстройиздат, 131-138.